Übungen zur Analysis 2 **Blatt 09**
W. Winter, H. Thiel **SS 2018**

Abgabe Freitag, 22. Juni 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass folgende Abschätzung gilt:
$$\| \int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$$
(Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass für den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v := \int_a^b f(t)dt$, folgendes gilt: $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \langle \int_a^b f(t)dt, v\rangle = \int_a^b \langle f(t), v\rangle dt$.)

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung, d.h. es existiert eine Konstante L sodass $\|f'(x)\| \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der folgenden Funktionen jeweils bis zum 2. Glied.

(a) $f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, an der Stelle $(1,1)$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 e^{x^2-y^2}$, an der Stelle $(1,1)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten den Raum $M_n(\mathbb{R})$ der reellwertigen $n \times n$-Matrizen. Dieser Raum ist isomorph zu $\mathbb{R}^{n^2}$. Es sei $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der invertierbaren Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ist offen in $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto AB$, ist differenzierbar.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ definieren wir $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, vgl. Aufgabe 1, Blatt 11 in Analysis I.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $t \mapsto e^{At}$, differenzierbar ist für alle $t \in \mathbb{R}$, und dass für die Ableitung gilt $\varphi'(t) = Ae^{At}$.

(Hinweis: Zeigen Sie dies z.B. zunächst im Punkt $t = 0$. Benutzen Sie dann (ohne Beweis), dass $e^B e^C = e^{B+C}$ falls $BC = CB$.)

(b) Es sei $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare vektorwertige Funktion. Zeigen Sie, dass dann die Produktregel $(e^{At}v(t))' = (e^{At})'v + e^{At}v'$ gilt.

(Hinweis: Benutzen Sie z.B. den Beweis der Produktregel aus Analysis I.)