Abgabe Freitag, 15. Juni 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitung der verketteten Funktion $f \circ g$ in den folgenden Fällen:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = u^2 + v^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = \big(e^t, t^2\big)$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = uv^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(u,v,w) = uv + vw - uw$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = \big(x+y, x+y^2, x^2+y\big)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Der Laplace-Operator $\triangle$ ist formal definiert als $\triangle := D_1D_1 + D_2D_2$. Die Laplace Gleichung (auch genannt Potentialgleichung) lautet $\triangle U = 0$, d.h.:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0.$$

Wir betrachten nun U in Polarkoordinaten r, φ für $\mathbb{R}^2$, d.h., wir betrachten die Abbildung $u\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(r,\varphi) := U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Zeigen Sie, dass die Laplace Gleichung für U in Polarkoordinaten die folgende Form annimmt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

(Hinweis: Berechnen Sie z.B. die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. Es gilt z.B. $\frac{\partial u}{\partial r} = \cos(\varphi)\frac{\partial U}{\partial x_1} + \sin(\varphi)\frac{\partial U}{\partial x_2}$.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt mit $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$. Ferner seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei Richtungsvektoren. Zeigen Sie: Falls die Richtungsableitungen bzgl. v und w an der Stelle x verschwinden, d.h. $D_v f(x) = D_w f(x) = 0$, dann sind v und w linear abhängig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion welche gegeben ist durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass beim Nullpunkt die Ableitungen von f in alle Richtungen existieren, und dennoch f dort unstetig ist.