Übungen zur Analysis 2 **Blatt 07**
W. Winter, H. Thiel **SS 2018**

Abgabe Freitag, 8. Juni 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, falls $\emptyset$ und X die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen in X sind. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt *zusammenhängend* falls sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist. Ein topologischer Raum X heißt *pfad-zusammenhängend*, falls es für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ gibt.

(a) Es seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass f zusammenhängende Mengen in X auf zusammenhängende Mengen in Y abbildet.

(b) Zeigen Sie, dass jeder pfad-zusammenhängende Raum auch zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien X ein topologischer Raum und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Wir definieren $\varphi, \psi\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \quad \text{und} \quad \psi(x) := \max\{f(x), g(x)\},$$

für $x \in X$. Zeigen Sie, dass φ und ψ stetig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Kurve einer Ellipse ist gegeben durch $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (a\cos(t), b\sin(t))$, für Konstanten $a, b \in (0, \infty)$.

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ.

Es sei $c \in (0, \infty)$ eine Konstante. Wir betrachten die Kurve $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\delta(t) := (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t))$. Diese Kurve heißt logarithmische Spirale.

(b) Skizzieren Sie die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.

(c) Es sei $L_{a,b}$ die Länge der Kurve auf dem Bereich $[a, b]$. Berechnen Sie $L_{a,b}$. Existiert der Limes $\lim_{a\to-\infty} L_{a,b}$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen und deren Determinanten für die folgenden Abbildungen:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(r, \varphi, \psi) = \big(r\sin(\varphi)\cos(\psi), r\sin(\varphi)\sin(\psi), r\cos(\varphi)\big)$.

(b) $f\colon (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \big(x + \sqrt{y}, \sqrt{x} + y\big)$.

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, \varphi) = \big(xe^y\sin(\varphi), x\cos(\varphi), e^{-y}\big)$.

****

Und hier noch eine Nachricht von der Fachschaft:
Am 6. 6. ab 14 Uhr findet das Sommerfest unseres Fachbereichs statt! Es wird eine Hüpfburg, Würstchen, vegane Bratlinge, Bier vom Fass und eine Überraschung geben. Packt sicherheitshalber eine Badehose ein! Meldet Euch auch für das Fußball- oder Volleyballturnier an, es gibt tolle Preise zu gewinnen!