Abgabe Freitag, 1. Juni 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Der Begriff der Rektifizierbarkeit (Definition 5.6 der Vorlesung) ergibt unverändert Sinn für (nicht unbedingt stetige) Abbildungen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion, d.h. es gilt $f(x) \leq f(y)$ für $x \leq y$.

(a) Zeigen Sie, dass f an höchstens abzählbar vielen Stellen nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f rektifizierbar ist. Was ist die Länge von f?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Die Zustandgleichung idealer Gase lautet

$$PV = cT,$$

wobei c eine Konstante ist, und P, V, T jeweils den Druck, das Volumen und die absolute Temperatur des Gases bezeichnen. (Diese Gleichung bedeutet z.B. Folgendes: Angenommen, eine feste Menge Gas befindet sich in einem Behälter von konstantem Volumen. Wird nun das Gas erwärmt, dann erhöht sich der Druck entsprechend der Gleichung.)
Leiten Sie folgende Beziehung ab:

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

(Hinweis: Es gilt z.B. $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{c}{P}$.)

(b) Die Zustandgleichung realer Gase (auch genannt van-der-Waals-Gleichung) lautet

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = cT,$$

wobei a, b, c Konstanten sind, und die Variablen P, V und T wieder jeweils den Druck, das Volumen und die Temperatur des Gases bezeichnen. Leiten Sie folgende Beziehung ab:

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

Aufgaben 3 und 4 auf der Rückseite.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion, welche gegeben ist durch:

$$f(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0),$$
$$f(0,0) := 0.$$

(a) Ist f stetig?

(b) Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist und dass dennoch $D_1D_2f(0,0) \neq D_2D_1f(0,0)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $k = 1, 2, \ldots$ sei $X_k := [0,1]$, versehen mit der üblichen Metrik. Es sei $X := \prod_{k=1}^{\infty}[0,1]$ das kartesische Produkt, versehen mit der Produktmetrik d, wie in Aufgabe 1 von Blatt 5. Nach dem Satz von Tychonoff ist X kompakt. (Dieser Satz wird später gezeigt und kann an dieser Stelle als bewiesen angenommen werden.) Wir definieren die Funktion $\Phi\colon X \to [0,1]$ durch

$$\varphi(\mathbf{a}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot a_k}{3^k},$$

für $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1} \in X$.
Wie in Aufgabe 3 von Blatt 5, betrachten wir für $k = 1, 2, \ldots$ und $i = 0, 1, \ldots, 3^k - 1$ die Intervalle $B_{k,i} := [i/3^k, (i+1)/3^k]$. Für $k = 1, 2, \ldots$ und $j = 0, 1, 2$ definieren wir $D_{k,j} := \bigcup_{i=0}^{3^{k-1}-1} B_{k,3i+j}$. Wir setzen dann $C_0 = [0,1]$ und für $k = 1, 2, \ldots$ $C_k := \bigcap_{l=1}^{k}(D_{l,0} \cup D_{l,2})$. Die Cantormenge ist dann definiert als $C := \bigcap_{k\geq 0} C_k \subseteq [0,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon X \to [0,1]$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass Φ die Teilmenge $\prod_{l=1}^{k}\{0,1\} \times \prod_{l\geq k+1}[0,1]$ auf C_k abbildet.
(Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Menge $\prod_{l=1}^{k}\{0\} \times \prod_{l\geq k+1}[0,1]$ auf $[0, 1/3^k]$ abgebildet wird.)

Es sei φ die Einschränkung von Φ auf die Teilmenge $\prod_{k=1}^{\infty}\{0,1\} \subseteq X$.

(c) Zeigen Sie, dass φ ein Homöomorphismus ist.
(Hinweis: Nach Aufgabe 1(b) von Blatt 5 genügt es zu zeigen, dass φ stetig und bijektiv ist.)

(d) Zeigen Sie, dass ein Homöomorphismus $\alpha\colon C \to C \times C$ existiert.

Es sei $f\colon C \to [0,1]$ die stetige Funktion aus Aufgabe 3 von Blatt 5 (die Teufelsleiter). Wir betrachten die stetige Abbildung $g\colon C \to [0,1] \times [0,1]$, die $x \in C$ auf $(f(y_1), f(y_2))$ abbildet, wobei $(y_1, y_2) = \alpha(x) \in C \times C$. Es ist leicht zu sehen, dass g surjektiv ist. Man kann die Abbildung $g\colon C \to [0,1] \times [0,1]$ zu einer stetigen Abbildung $h\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ erweitern. Dazu setzt man die Funktion g einfach linear auf den einzelnen Intervallen aus $[0,1]\backslash C$ fort und bentutzt die gleichmäßige Stetigkeit von g um zu zeigen, dass die resultierende Funktion h stetig ist. Eine solche Kurve h heißt raumfüllend, und sie zeigt, dass Kurven im $\mathbb{R}^n$ überraschend kompliziert sein können.