Abgabe Freitag, 18. Mai 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es seien $(X_k, \mathcal{T}_k)$ topologische Räume für $k \in \mathbb{N}$. Es sei $X := \prod_{k=0}^{\infty} X_k$ das kartesische Produkt, d.h. die Menge aller Folgen $\mathbf{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in X_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Die Produkttopologie auf X ist definiert als kleinste (auch genannt gröbste) Topologie auf X, so dass alle Koordinatenprojektionen $p_n \colon X \to X_n$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto x_n$, stetig sind. Das bedeutet, eine Menge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn für jeden Punkt $\mathbf{a} \in U$ Mengen $U_k \in \mathcal{T}_k$ für $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $U_k \neq X_k$ für höchstens endlich viele Indizes, und so dass $\mathbf{a} \in \prod_{k=0}^{\infty} U_k \subseteq U$.
Es seien (X_k, d_k) metrische Räume für $k \in \mathbb{N}$, sodass $d_k(x, y) \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x, y \in X_k$. (D.h. jeder Raum X_k hat Durchmesser höchstens 1.) Die Produktmetrik auf $X := \prod_{k=0}^{\infty} X_k$ ist definiert als

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k(a_k, b_k),$$

für $\mathbf{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, \mathbf{b} = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass die Produktmetrik auf $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ die Produkttopologie induziert.

(b) Es seien X, Y topologische Räume mit X kompakt und Y Hausdorff, und es sei $f \colon X \to Y$ eine stetige, bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass dann f sogar ein Homöomorphismus ist (d.h. die Abbildung $f^{-1} \colon Y \to X$ ist stetig).
(Hinweis: Benutzen Sie Proposition 4.5, Satz 4.9 und Aufgabe 4(a) von Blatt 4 um zu zeigen, dass f offene Mengen in X auf offene Menge in Y abbildet.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) = \begin{cases} (0, 0), & \text{falls } x = 0 \\ (x, x^2 \cos(\frac{\pi}{x})), & \text{falls } x > 0 \end{cases}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Kurve f.

(b) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass f nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 3 auf der Rückseite.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für $k = 1, 2, \ldots$ und $i = 0, 1, \ldots, 3^k - 1$ betrachten wir folgende Teilintervalle von $[0, 1]$:

$$B_{k,i} := [i/3^k, (i+1)/3^k].$$

Für $k = 1, 2, \ldots$ und $j = 0, 1, 2$ definieren wir

$$D_{k,j} := \bigcup_{i=0}^{3^{k-1}-1} B_{k,3i+j}.$$

Wir setzen $C_0 = [0, 1]$ und definieren für $k = 1, 2, \ldots$

$$C_k := \bigcap_{l=1}^{k} (D_{l,0} \cup D_{l,2}).$$

Die Menge C_k ist eine Vereinigung von 2^k disjunkten Intervallen der Länge $1/3^k$. Wir nummerieren diese Intervalle als $C_{k,1}, \ldots, C_{k,2^k}$. Die Cantormenge ist dann definiert als $C := \bigcap_{k \geq 0} C_k$.

Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ bezeichne $\mathbb{1}_A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von A, d.h.

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}.$$

Für $k \geq 0$ definieren wir Funktionen $f_k, g_k \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $g_k := \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \mathbb{1}_{C_k}$ und

$$f_k(x) := \int_0^x g_k(t)dt.$$

(a) Skizzieren Sie f_0, f_1, f_2 auf dem Intervall $[0, 1]$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: f_k ist stetig mit $f_k(0) = 0, f_k(1) = 1$ und f_k ist konstant auf jedem offenen Teilintervall von $[0, 1] \setminus C_k$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \notin C_k$ gilt: $f_{k+1}(x) = f_k(x)$.

(Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass $\int_{C_{k,i}} g_{k+1}(t)dt = \int_{C_{k,i}} g_k(t)dt$ für $i = 1, \ldots, 2^k$.)

(d) Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $\|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leq 2^{-k+1}$.

(Hinweis: Wegen (c) genügt es zu zeigen, dass $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq 2^{-k+1}$ für $x \in C_k$. Zeigen Sie z.B., dass für $x \in C_{k,i}$ gilt: $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \int_{C_{k,i}} |g_{k+1}(t) - g_k(t)|dt$, und schätzen Sie dieses Integral geeignet ab.)

(e) Folgern Sie, dass die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f konvergiert.

(Hinweis: Benutzen Sie z.B., dass $C([0, 1], \mathbb{R})$ vollständig ist bzgl. $\| \cdot \|_\infty$.)

Man kann dann zeigen, dass f monoton steigend ist mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, und dass f konstant auf jedem offenen Teilintervall von $[0, 1] \setminus C$ ist. Das bedeutet, dass f "fast überall" differenzierbar mit Ableitung 0 ist, und dennoch nicht konstant. Deshalb wird die Funktion f auch "Teufelstreppe" oder "Teufelsleiter" genannt.