Abgabe Donnerstag, 10. Mai 2018, bis 10.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner sei $\gamma$ eine Konstante mit $0 \leq \gamma < 1$, und es sei $f\colon A \to A$ eine Abbildung, sodass $d(f(x), f(y)) \leq \gamma \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in A$.
Zeigen Sie, dass $f$ genau einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert genau ein Punkt $a \in A$ mit $f(a) = a$. Zeigen Sie auch, dass für jeden beliebigen Punkt $x_0 \in A$ und die induktiv definierten Punkte $x_{k+1} := f(x_k)$ gilt, dass $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $M := \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1, f \geq 0\}$ die Menge der kontraktiven, nichtnegativen, stetigen Funktionen auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass $M$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt ist. (Das bedeutet, dass der Satz von Heine-Borel nicht in beliebigen metrischen Räumen gilt.)

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Jeder kompakte, metrische Raum ist vollständig.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge.

(a) Zeigen Sie: Falls die Topologie auf $X$ Hausdorff ist, dann ist $K$ abgeschlossen.

(b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass $K$ nicht unbedingt abgeschlossen ist (falls $\mathcal{T}$ nicht Hausdorff ist).

## Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. (Vgl. Aufgabe 4 von Blatt 2.)
(Hinweis: Sei $\|.\|\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine beliebige Norm. Zeigen Sie zuerst, dass eine Konstante $C$ existiert, sodass $\|x\| \leq C \cdot \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es folgt, dass die Norm stetig ist bzgl. der üblichen Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Benutzen Sie nun, dass die Menge $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ kompakt ist, und dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum annimmt.)