Abgabe Donnerstag, 3. Mai 2018, bis 10.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 3.6 der Vorlesung: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und $f_n\colon X \to Y$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon X \to Y$ Abbildungen. Wir nehmen an, dass f_n für jedes n stetig ist, und dass $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Das Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass die Bedingungen von Satz 2.18 notwendig sind. Der Satz besagt, dass für einen vollständigen, metrischen Raum X mit einer absteigenden Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ abgeschlossener, nicht-leerer Mengen mit $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ gilt, dass $\bigcap_n A_n$ genau einen Punkt enthält. Wir betrachten die drei Bedingungen:

(1) X ist vollständig.
(2) Die Mengen A_n sind abgeschloseen.
(3) Die Folge $(\operatorname{diam}(A_n))_n$ konvergiert gegen 0.

Geben Sie in jedem der folgenden Beispiele zu jeder der drei Bedingungen an, ob sie jeweils erfüllt sind, und berechnen Sie jeweils $\bigcap_n A_n$.

(a) $X = (0, 1]$ mit der üblichen Metrik, und $A_n := (0, 1/n]$.
(b) $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik, und $A_n := [n, \infty)$.
(c) $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik, und $A_n := (0, 1/n)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Für einen Punkt $x \in X$ ist der Abstand von x zu Y definiert als:

$$\operatorname{dist}(x, Y) := \inf \big\{ d(x, y) \mid y \in Y \big\}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{dist}(x, Y)$, stetig ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Es sei $C^1([0, 1])$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass $C^1([0, 1])$ nicht vollständig ist bezüglich der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup \big\{ |f(x)| \mid x \in [0, 1] \big\}.$$

(b) Es sei $V := \{f\colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, versehen mit der Norm

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx,$$

für $f \in V$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) := f(0)$, linear aber nicht stetig ist.

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei V ein unendlich dimensionaler, normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ gibt, die nicht stetig ist.
(Hinweis: Sie können verwenden, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.)