Übungen zur Analysis 2 **Blatt 02**
W. Winter, H. Thiel **SS 2018**

Abgabe Donnerstag, 26. April 2018, bis 10.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Beschreiben Sie alle Topologien auf der Menge $\{0, 1, 2\}$.
(b) Welche dieser Topologien werden durch eine Metrik induziert?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir betrachten das System $\mathcal{A} := \{X \setminus U : U \in \mathcal{T}\}$ der abgeschlossenen Mengen. Zeigen Sie:

(1) Es gilt $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
(2) Falls $A, B \in \mathcal{A}$, dann gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$.
(3) Falls $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen in $\mathcal{A}$ ist, dann gilt $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

(b) Es sei $Y \subseteq \mathbb{R}$ eine offene und abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass entweder $Y = \emptyset$ oder $Y = \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) $\overline{Y}$ ist abgeschlossen.
(b) ∂Y ist abgeschlossen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei X eine Menge. Zwei Metriken $d_1, d_2 \colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißen **äquivalent**, falls Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y).$$

(Warnung: Manchmal werden zwei Metriken auch **bi-Lipschitz äquivalent** genannt, wenn sie die obige Bedingung erfüllen. Manchmal werden dann zwei Metriken auch äquivalent genannt, wenn sie die gleiche Topologie induzieren.)

(a) Zeigen Sie, dass äquivalente Metriken die gleiche Topologie erzeugen.

Sei X ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|, \|\cdot\|' \colon X \to \mathbb{R}$ heißen **äquivalent**, falls Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, sodass für alle $x \in X$ gilt:

$$\alpha \cdot \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \cdot \|x\|.$$

(b) Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}$ äquivalent sind.

(Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\|\cdot\|'$ äquivalent zur üblichen euklidischen Norm $\|\cdot\|$ ist. Betrachten Sie dazu die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} : \|x\|' \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass eine Zahl $r \in (0, \infty)$ existiert, sodass $M = [-r, r]$. Man kann dann sogar zeigen, dass $\|x\| = r\|x\|'$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Zusatzaufgabe 5 (4 Punkte)

Das Ziel der Aufgabe ist, eine stetige Funktion zu konstruieren welche nirgends differenzierbar ist. Die Frage, ob solche Funktionen überhaupt existieren, wurde im 19. Jahrhundert viel diskutiert, wobei die meisten Mathematiker davon ausgingen, dass eine stetige Funktionen immer an mindestens einer Stelle differenzierbar ist. Im Jahr 1872 schockierte Weierstrass die mathematische Öffentlichkeit mit der Präsentation eines ersten Beispiels. In dieser Aufgabe betrachten wir ein einfacheres Beispiel von Takagi von 1903.
Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ gegeben durch $\varphi(x) := \min\{|x-k| : k \in \mathbb{Z}\}$. Für $k = 0,1,2,\ldots$ sei die Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = \frac{1}{2^k}\varphi(2^k x)$, und $f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$.
(a) Skizzieren Sie $f_0, f_0+f_1, f_0+f_1+f_2$ und $f_0+f_1+f_2+f_3$ auf dem Interval $[0,1]$.
(b) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
(c) Zeigen Sie, dass f nirgends differenzierbar ist.
(Hinweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Sie können verwenden, dass es genügt zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen zu konstruieren, sodass $a_n \leq x \leq b_n$, sodass $|b_n - a_n|$ gegen 0 konvergiert, und sodass $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ nicht konvergiert.
Für $s \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und $k \geq n$ gilt $f_k(s/2^n) = 0$ und damit $f(s/2^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\varphi(\frac{s}{2^{n-k}})$.
Für $n = 1,2,\ldots$ seien nun a_n und b_n gegeben als $a_n = s_n/2^n$ und $b_n = (s_n+1)/2^n$ für eine geeignete Zahl $s_n \in \mathbb{Z}$. Es folgt $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k}\left[\varphi(\frac{s_n+1}{2^{n-k}}) - \varphi(\frac{s_n}{2^{n-k}})\right]$, und man kann zeigen, dass $2^{n-k}\left[\varphi(\frac{s_n+1}{2^{n-k}}) - \varphi(\frac{s_n}{2^{n-k}})\right]$ entweder 1 oder -1 ist.)