Abgabe Donnerstag, 19. März 2018, bis 10.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie: (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\arctan(x)}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)-\ln(1+x)}{\arctan(x)\cdot\ln(1+x)}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $\sqrt{1+x}$ mit Entwicklungspunkt 0.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Die Funktion $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(x) := x\cdot f(x)$. Zeigen Sie, dass für die Taylorreihen von f und g mit Entwicklungspunkt 0 gilt: $T_g(x) = x\cdot T_f(x)$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Für $p\in(0,\infty)$ und einen Vektor $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ setze $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}$.

(a) Zeigen Sie, dass für $p\in(0,\infty)$, $x\in\mathbb{R}^d$ und $c\in\mathbb{R}$ gilt: $\|c\cdot x\|_p = |c|\cdot\|x\|_p$, wobei $c\cdot x := (c\cdot x_1,\dots,c\cdot x_n)\in\mathbb{R}^d$.

(b) Zeigen Sie, dass für $p,q\in(1,\infty)$ mit $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, und für $x,y\in\mathbb{R}^d$ gilt: $\|x\cdot y\|_1 \leq \|x\|_p\cdot\|y\|_q$, wobei $x\cdot y := (x_1\cdot y_1,\dots,x_d\cdot y_d)\in\mathbb{R}^d$.
(Hinweis: Benutzen Sie z.B. (a) um das Problem auf den Fall zu reduzieren, wo $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Sie können dann die Young'sche Ungleichung als bekannt annehmen: Für positive Zahlen $a,b\in(0,\infty)$ und p,q wie oben gilt $ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$. Die Young'sche Ungleichung folgt daraus, dass die Logarithmusfunktion strikt konkav ist.)

(c) Zeigen Sie, dass für $p\in(1,\infty)$ und $x,y\in\mathbb{R}^d$ gilt: $\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p$.
(Hinweis: Behandeln Sie den Fall $p=1$ separat. Für $p\in(1,\infty)$ benutzen Sie z.B. $\|x+y\|_p^p = \sum_i |x_i+y_i|^p \leq \sum_i \left(|x_i+y_i|^{p-1}(|x_i|+|y_i|)\right) = \|(|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1})_i\|_1 + \|(|y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1})_i\|_1$, und wenden Sie dann (b) geeignet an.)

(d) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ für $p\in[1,\infty)$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ definiert.

(e) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass für $p\in(0,1)$ die Dreiecksungleichung von $\|\cdot\|_p$ nicht erfüllt wird.

Wir betrachten nun den Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Für $f\in C([0,1])$ und $p\in[1,\infty)$ setze: $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

(f) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $C([0,1])$ definiert.
(Hinweis: Um Definitheit zu zeigen, benutzen Sie z.B., dass für eine nicht-verschwindende Funktion $f\in C([0,1])$ ein Intervall $[a,b]\subset[0,1]$ und ein $\delta>0$ existiert, sodass $|f(x)|\geq\delta$ für $x\in[a,b]$. Zeigen Sie die Dreiecksungleichung zuerst für Treppenfunktionen deren Unstetigkeitsstellen an den Punkten $1/n, 2/n,\dots,(n-1)/n$ liegen. Sie können dann verwenden, dass sich jedes $f\in C([0,1])$ durch solche Treppenfunktionen f_n approximieren lässt (mit $n\to\infty$), und dass dann gilt $\|f\|_p^p = \int |f(x)|^p dx = \lim_n \int |f_n(x)|^p dx$.)

Präsenzaufgabe 1

Beweisen Sie: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann konvergiert die Folge der Integrale $\int_a^b f(x)\sin(kx)dx$ gegen 0 (für $k \to \infty$).
(Hinweis: Partielle Integration.)

Präsenzaufgabe 2

Zeigen Sie: Für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)} - 1/2.$$

(Hinweis: Benutzen Sie $\cos(kx) = 1/2(e^{ikx} + e^{-ikx})$ und die Summenformel der geometrischen Reihe.)
Folgern Sie unter Verwendung von Präsenzaufgabe 1, dass für $x \in (0, 2\pi)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)dt$ und Präsenzaufgabe 1.)
Für $x = \pi/2$ erhält man die Leibniz'sche Reihe:

$$\pi/4 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots .$$

Präsenzaufgabe 3

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Euler'sche Zahl $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ irrational ist. Um einen Widerspruch zu erreichen, nehmen Sie an, dass $e = a/b$ für natürliche Zahlen $a, b \geq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass $x := b! \cdot \left(e - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}\right)$ eine natürliche Zahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass $x > 0$.

(c) Zeigen Sie, dass $x < 1$.
(Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass $x = \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{b!}{k!} \leq \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$ und schätzen Sie diese Summe geeignet ab.)