Übungen zur Analysis 3 | **Blatt 09**
W. Winter, S. Gemsa | **WS 2018/19**

Abgabe Dienstag, 11. Dezember 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\lambda > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie, dass $\lambda \cdot A$ messbar ist und $v(\lambda \cdot A) = \lambda^n v(A)$ gilt, wobei $\lambda \cdot A := \{(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in A\}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ das Simplex mit den Eckpunkten $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}^n$, d. h.

$$S = \Big\{ \sum_{k=1}^n c_k(a_k - a_0) \mid c_k \geq 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n \text{ und } \sum_{k=1}^n c_k \leq 1 \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass S messbar ist und $v(S) = \frac{1}{n!}|\det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0)|$ gilt.

(Hinweis: Untersuchen Sie zunächst den Fall $S = \Delta^n$, d. h. $a_0 = 0$ und für $k \geq 1$ sei a_k der k-te Einheitsvektor. Zeigen Sie hierfür induktiv $v(\Delta^n) = \frac{1}{n!}$ unter Verwendung der vorherigen Aufgabe.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine nicht ausgeartete, affin-lineare Transformation, d. h. $T(x) = Ax + b$ für ein $A \in GL_n(\mathbb{R})$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei an die Definition des Schwerpunktes s_K einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $v(K) > 0$ von Blatt 3, Aufgabe 3, erinnert. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt $s_{T(K)}$ von $T(K)$ durch $T(s_K)$ gegeben ist.