Abgabe Dienstag, 20. November 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ integrierbarer Funktionen g_k auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \int |g_k| \,\mathrm{d}x < \infty$ konvergiert fast überall gegen eine integrierbare Funktion, und es gilt:

$$\int \Big(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \Big) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $A_1 \supset A_2 \ldots$ eine Folge von messbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann der Durchschnitt $D := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ messbar ist, und dass

$$v(D) = \lim_{k \to \infty} v(A_k).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $f_k \colon A \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, integrierbare Funktionen auf einer messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$. Die Folge $(f_k)_k$ konvergiere auf A gleichmässig gegen die Funktion f. Zeigen Sie, dass f über A integrierbar ist, und dass

$$\int_A f \,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_A f_k \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f \colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige, beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.