Abgabe Dienstag, 13. November 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Eine *Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum $H \subset \mathbb{R}^n$. Eine *affine Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form $x_0 + H = \{x_0 + v \mid v \in H\}$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest ist und $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene ist. Zeigen Sie: Jede affine Hyperebene ist eine Nullmenge.

(Hinweis: Benutzen Sie Translationsinvarianz des Integrals, um das Problem auf den Fall einer Hyperebene zu reduzieren. Dann kann man die Hyperebene als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen schreiben. Es genügt dann zu zeigen, dass jede dieser Mengen eine Nullmenge ist.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir verwenden die Halbnorm $\|\_\|_1$ um für jedes $p \in [1, \infty)$ folgende Halbnorm zu definieren:

$$\|f\|_p := (\||f|^p\|_1)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist. Zeigen Sie: Für beliebige $p, q \in [1, \infty)$ mit $p \neq q$ gibt es Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_p < \infty$ und $\|f\|_q = \infty$, während $\|g\|_p = \infty$ und $\|g\|_q < \infty$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Verhalten des Integrals bei Streckungen. Zu $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^*$ definieren wir $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $S(x) := (x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, dann auch $f \circ S$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\Big(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}\Big)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) = |s_1 \cdots s_n| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n).$$

(b) Mit $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $S^{-1}(A)$ messbar und hat das Volumen

$$v(S^{-1}(A)) = |s_1 \cdots s_n| \cdot v(A).$$

Berechnen Sie damit das Volumen eines Ellipsoids im $\mathbb{R}^3$.