**Übungen zur Analysis 3** **Blatt 02**
**W. Winter, S. Gemsa** **WS 2018/19**

Abgabe Dienstag, 23. Oktober 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Das Ziel der Aufgabe ist es, den Satz von Fubini für Treppenfunktionen zu zeigen. Es seien $k, l \geq 1$ und $n = k + l$. Weiterhin sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Wir definieren zwei Funktionen $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ vermöge:

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_k) &= \int_{\mathbb{R}^l} f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) \,\mathrm{d}(y_1, \ldots, y_l) \\ h(y_1, \ldots, y_l) &= \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $g$ und $h$ Treppenfunktionen sind.

(b) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^k} g(x_1, \ldots, x_k) \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_k) = \int_{\mathbb{R}^l} h(y_1, \ldots, y_l) \,\mathrm{d}(y_1, \ldots, y_l).$$

### Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f$ Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi$ und $\psi$ gibt mit $\phi \leq f \leq \psi$ und $\|\psi - \phi\|_1 < \epsilon$. Weiterhin heißt $f$ (Lebesgue-)integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\phi$ gibt mit $\|f - \phi\|_1 < \epsilon$. Zeigen Sie:

(a) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die außerhalb eines Kompaktums verschwindet, ist Riemann-integrierbar.

(b) Jede Riemann-integrierbare Funktion $f$ ist auch Lebesgue-integrierbar und es gilt $\int f \,\mathrm{d}x = \sup\bigl\{ \int \varphi \,\mathrm{d}x \mid \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \leq f \bigr\}$.

(c) Die charakteristische Funktion $\chi_C$ des Cantorschen Diskontinuums $C \subset [0, 1]$ ist Riemann-integrierbar.

(d) Die charakteristische Funktion $\chi_M$ der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$, $M = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, ist Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar.

Aufgabe 3 befindet sich auf der Rückseite.

**Aufgabe 3 (6 Punkte)**

Ein Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass der Raum der stetigen Funktionen, die außerhalb eines Kompaktums verschwinden, dicht im Raum der integrierbaren Funktionen liegt.

(a) Zeigen Sie zuerst, dass für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$ eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, die außerhalb eines Kompaktums verschwindet, und so dass $\|\chi_Q - g\|_1 < \epsilon$.

(b) Folgern Sie, dass für jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jedes $\epsilon > 0$ eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, die außerhalb eines Kompaktums verschwindet, und so dass $\|f - g\|_1 < \epsilon$.

(c) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(x)| \,\mathrm{d}x$, stetig in $0 \in \mathbb{R}^n$ ist.