Abgabe Dienstag, 22. Januar 2019, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{SL}(n)$ ist eine (n^2-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

(b) $\mathrm{T}_E\,\mathrm{SL}(n)$ ist der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen mit Spur 0, wobei $E \in M_n(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix bezeichne. Ist A eine Matrix mit Spur 0, so definiert $\gamma(t) := e^{tA},\ t \in \mathbb{R}$, eine Kurve in $\mathrm{SL}(n)$ mit $\gamma(0) = E$ und $\dot\gamma(0) = A$.

(Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ die Beziehung $\det e^A = e^{\mathrm{Spur}\,A}$ gilt.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine *Einbettung der reellen projektiven Ebene* $\mathbb{P}^2$ *in den* $\mathbb{R}^6$. Die Punkte von $\mathbb{P}^2$ sind per definitionem die Geraden des $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt; $\mathbb{P}^2$ kann auch mit der Menge der ungeordneten Paare von Antipoden $p, -p$ der Sphäre S^2 identifiziert werden. Eine bijektive Abbildung des $\mathbb{P}^2$ auf eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$ erhält man mit Hilfe von

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6,\ \ f(x,y,z) := (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy).$$

Zeigen Sie:

(a) Für $p, q \in S^2$ gilt genau dann $f(p) = f(q)$, wenn $q = -p$. $\mathbb{P}^2$ kann also mit $M := f(S^2)$ identifiziert werden.

(b) M ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Der Kreis $\alpha(v) = (R + a\cos(v), a\sin(v))$, $v \in \mathbb{R}$, mit $0 < a < R$ ergibt die Immersion

$$\gamma(u,v) = ((R + a\cos(v))\cos(u), (R + a\cos(v))\sin(u), a\sin(v)),\ \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Ihre Spur T wird als Torus bezeichnet. Für jede reelle Zahl λ ist dann $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) := \gamma(t, \lambda t)$, eine reguläre Kurve in T.
Zeigen Sie, dass die Spur $g(\mathbb{R})$ für rationales λ eine kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass die Spur $g(\mathbb{R})$ für irrationales λ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist; $g(\mathbb{R})$ liegt in diesem Fall dicht im Torus.