Abgabe Dienstag, 15. Januar 2019, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(X, \Sigma, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{L}^1(\mu) := \{f\colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_X |f| d\mu < \infty\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und dass die Abbildung $I\colon \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}$, gegeben durch $I(f) = \int_X f d\mu$ für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, ein lineares Funktional ist.
Hinweis: Für messbare Funktionen $f, g$ auf $X$ ist $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$ messbar. Weiter gelten: (i) Falls $s \leq |f + g|$, so ist auch $s \leq |f| + |g|$. (ii) Falls $A \in \Sigma$ und $f$ messbar, so ist auch $\chi_A \cdot f$ messbar.

## Aufgabe 2 (6 Punkte)

*Rotationsflächen im* $\mathbb{R}^3$. Es sei $M = f^{-1}(0)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, wobei $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion sei mit 0 als regulärem Wert. Zeigen Sie:

$$R := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0\right\}$$

ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.
Durch Rotation einer Kreislinie etwa erhält man einen sogenannten Torus. Stellen Sie einen solchen als Nullstellenmenge einer $\mathcal{C}^1$-Funktion dar.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

*Die Lorentzgruppe der speziellen Relativitätstheorie.* Es sei $D \in M_4(\mathbb{R})$ die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1, 1, 1, -1)$. Unter der Lorentzgruppe $O(3, 1)$ versteht man die Gruppe aller $(4 \times 4)$-Matrizen $X$, die die Gleichung $X^T D X = D$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $O(3, 1)$ eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{16} \cong M_4(\mathbb{R})$ ist.