Abgabe Dienstag, 16. Oktober 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Das sogenannte ebene Cantor'sche Diskontinuum C ist eine fraktale Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Um diese Menge zu konstruieren, betrachten wir zuerst die Menge

$$A_0 := \bigcup \{[k, k+1] \times [l, l+1] \mid k, l \in \mathbb{Z} \text{ mit } k - l \text{ gerade}\},$$

die man sich als die schwarzen Felder eines Schachbretts vorstellen kann. Für $n \geq 1$ definieren wir

$$A_n := \tfrac{1}{3^n} A_0 = \left\{ \tfrac{1}{3^n}(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in A_0 \right\},$$

$$C_n := \big([0,1] \times [0,1]\big) \cap \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Die Menge C ist dann definiert als $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

(a) Skizzieren Sie C_1, C_2 und C_3.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $\epsilon > 0$ existieren Quader $Q_1, \cdots, Q_k \subset \mathbb{R}^2$ sodass $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{k} \mathsf{v}(Q_i) < \epsilon$.

Bemerkung: Für jeden 'vernünftigen' Begriff von Flächeninhalt (vernünftig beinhaltet insbesondere, dass der Flächeninhalt monoton ist, d. h., eine Menge X hat einen kleineren Flächeninhalt als eine Menge Y falls $X \subset Y$) muss also gelten, dass der Flächeninhalt des ebenen Cantor'schen Diskontinuums C null ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante mit $0 \leq \lambda < 1$. Zeigen Sie, dass dann eine Teilmenge $X \subset [0,1]$ existiert, die sich als Durchschnitt $X = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$ von Mengen $X_n \subset [0,1]$ schreiben lässt, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) $X_{n+1} \subset X_n$ für alle n.

(b) X_n ist eine Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Intervallen $I_{n,k}$ und für den als $\lambda_n := \sum_k \mathsf{v}(I_{n,k})$ definierten Inhalt von X_n gilt $\lambda_n \to \lambda$.

(c) X enthält kein Intervall positiver Länge.

Solch eine Menge X nennt man auch verallgemeinertes Cantorsches Diskontinuum.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Jede endliche Vereinigung von Quadern in $\mathbb{R}^n$ lässt sich schreiben als endliche Vereinigung paarweise disjunkter Quader, die entweder offen sind oder verschwindendes Volumen haben.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ der Vektorraum der Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Integration definiert eine Abbildung $\int\colon \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \int \varphi \, \mathrm{d}x$. Zeigen Sie Proposition 1.3(c) aus der Vorlesung:

(a) Das Integral $\int$ ist ein lineares Funktional auf $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, d. h., für $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $\int (\alpha\phi + \beta\psi) \, \mathrm{d}x = \alpha \int \varphi \, \mathrm{d}x + \beta \int \psi \, \mathrm{d}x$.

(b) Das Integral $\int$ erfüllt folgende Variante der Dreiecksungleichung: Für $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ gilt $\left|\int \varphi \, \mathrm{d}x\right| \leq \int |\varphi| \, \mathrm{d}x$. Hierbei ist für eine Treppenfunktion $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \chi_{Q_k}$ der Betrag $|\varphi|$ definiert als die Treppenfunktion $|\varphi| = \sum_{k=1}^{s} |c_k| \chi_{Q_k}$.

(c) Das Integral $\int$ ist monoton, d. h., für $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\varphi \leq \psi$ gilt: $\int \varphi \, \mathrm{d}x \leq \int \psi \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Funktion. Eine Treppe über f ist eine Reihe $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}$, wobei $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ offene Quader sind und $c_k \in \mathbb{R}_+$, und sodass $|f(x)| \leq \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Wir setzen $I(\Phi) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{v}(Q_k)$ und $\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) \mid \Phi \text{ ist Treppe über } f\}$. Zeigen Sie Bemerkung 1.8 aus der Vorlesung:

(a) Für jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ existiert eine Treppe über f.

(b) Für jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$.

(c) Für je zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ gilt $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.