9. Integration über Untermannigfaltigkeiten

"'The time has come,' the Walrus said, 'to talk of many things.'"

Lewis Carroll

9.1 Def. und Satz Wir definieren eine Abbildung

$$v_d : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{d\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

durch

$$v_d(a_1,\dots,a_d) := \sqrt{\det\left((a_1,\dots,a_d)^T (a_1,\dots,a_d)\right)}.$$

Dann ist v_d wohldefiniert und eindeutig bestimmt durch

(V1) $v_d(a_1,\dots,\lambda a_i,\dots,a_d) = |\lambda| \cdot v_d(a_1,\dots,a_d)$ für $a_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(V2) $v_d(a_1,\dots,a_i+a_j,\dots,a_j,\dots,a_d) = v_d(a_1,\dots,a_d)$ für $a_k \in \mathbb{R}^n$

(V3) $v_d(a_1,\dots,a_d) = 1$ für jedes ONS $a_1,\dots,a_d \in \mathbb{R}^n$.

Bew.: $\det A^t A \geq 0$ für jede reelle Matrix $A \Rightarrow v_d$ wohldefiniert.

v_d erfüllt (V1), (V2), (V3): Rechenregeln für Determinante.

Eindeutigkeit: wie für Determinante mittels elementarer Umformungen von $(a_1,\dots,a_d)$ in $(b_1,\dots,b_d)$ mit $b_1,\dots,b_d$ ONS. □

9.2 Lemma: Sei $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann gilt für ~~jeden~~ $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^d$ mit $\underbrace{P(b_1, \dots, b_d)}_{B}$ Quader (d.h. die b_i sind Vielfache von Standardbasisvektoren)

$$v_d(Ab_1, \dots, Ab_d) = \sqrt{\det(A^t A)} \cdot v_{\mathbb{R}^d}(P(b_1, \dots, b_d)).$$

Beweis:

$$v_d(Ab_1, \dots, Ab_d) = \sqrt{\det(B^t A^t A B)} = \sqrt{\det B^t \det(A^t A) \det B}$$

$$= \sqrt{\det(A^t A)} \cdot \sqrt{\det(B^t B)} = \sqrt{\det(A^t A)} \cdot v_{\mathbb{R}^d}(P(b_1, \dots, b_d))$$

$\square$

9.3 Def. und Satz: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $\varphi: \underset{\text{offen in } \mathbb{R}^n}{U} \to \underset{\text{offen}}{V} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ eine Karte.

Dann ist $\gamma := \varphi^{-1}\big|_{\underbrace{(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V}_{=: \Omega \text{ offen in } \mathbb{R}^d}}$ eine Einbettung mit $\gamma(\Omega) = M \cap U$.

Eine Funktion $f: M \cap U \to (-\infty, \infty]$ heißt integrierbar, falls

$f \circ \gamma(\cdot) \cdot \underbrace{\sqrt{\det(D\gamma(\cdot)^t D\gamma(\cdot))}}_{\text{Gramsche Determinante}}$ integrierbar über Ω ist.

In diesem Fall setzen wir

$$\int_{M \cap U} f \, dS := \int_\Omega f \circ \gamma(x) \sqrt{\det(D\gamma(x)^t D\gamma(x))} \, dx.$$

Das Integral ist wohldefiniert (d.h. es hängt nicht von der Wahl von γ ab.

Falls die Funktion 1 auf $M \cap U$ integrierbar ist, so setzen wir

$v_d(M \cap U) = \int_{M \cap U} 1 \, dS$.

Bew.: γ ist Einbettung, φ^{-1} ist Homöomorphismus, also auch γ.

$D\gamma(x) = \left(\partial_j(\varphi^{-1})_i \binom{x}{0}\right)_{1\le i\le n,\ 1\le j\le d}$, d.h. $D\gamma(x)$ besteht aus den ersten d Spalten von $D(\varphi^{-1})\binom{x}{0}$. Also $D(\varphi^{-1})\binom{x}{0}$ ist invertierbar $\Rightarrow D\gamma(x)$ hat Rang d.

Wohldefiniertheit:

Bew.: Sei $\tilde\varphi : U \to \tilde V \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ eine weitere Karte und

$$\tilde\gamma := \tilde\varphi^{-1}\big|_{\underbrace{(\mathbb{R}^d\times\{0\})\cap\tilde V}_{=:\tilde\Omega\subset\mathbb{R}^d}}.$$

Dann gilt $\gamma(\Omega) = \tilde\gamma(\tilde\Omega)$ und $\gamma \sim \tilde\gamma$ nach Bsp. 13, d.h. es existiert ein C^1-Diffeomorphismus $T : \Omega \to \tilde\Omega$ mit $\gamma = \tilde\gamma \circ T$.

Dann gilt nach der Kettenregel

$$D\gamma(x)^t D\gamma(x) = DT(x)^t D\tilde\gamma(T(x))^t D\tilde\gamma(T(x)) DT(x),$$

also

$$\sqrt{\det\left(D\gamma(x)^t D\gamma(x)\right)} = \sqrt{\det\left(DT(x)^t D\tilde\gamma(T(x))^t D\tilde\gamma(T(x)) DT(x)\right)}$$
$$= |\det(DT(x))| \cdot \sqrt{\det\left(D\tilde\gamma(T(x))^t D\tilde\gamma(T(x))\right)}.$$

Der Transformationssatz liefert nun

$$\int_\Omega f\circ\gamma(x)\sqrt{\det\left(D\gamma(x)^t D\gamma(x)\right)}\,dx$$
$$= \int_\Omega f\circ\tilde\gamma(T(x))\sqrt{\det\left(D\tilde\gamma(T(x))^t D\tilde\gamma(T(x))\right)}\,|\det DT(x)|\,dx$$
$$= \int_{\tilde\Omega} f\circ\tilde\gamma(y)\sqrt{\det\left(D\tilde\gamma(y)^t D\tilde\gamma(y)\right)}\,dy,$$

d.h. das Integral $\int f\,dS$ hängt nicht von der Wahl der Karte φ (bei fester U) ab. $\square$

3.4 <u>Def. und Satz:</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung.

Dann existiert eine Familie $(e_k : M \to [0,1])_{k \in \mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen mit:

~~heißt zugehörige (lokal endliche) Zerlegung der Eins, falls gilt:~~ $\mathcal{U}$ untergeordnete

(i) Für jedes $x \in M$ existiert $x \in V_x \subset M$ offen so dass für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$ $e_k|_{V_x} \equiv 0$ gilt.

(ii) Für jedes $x \in M$ gilt $\sum_{k \in \mathbb{N}} e_k(x) = 1$.

(iii) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $i_k \in I$ mit

$$\operatorname{supp} e_k := \overline{\{x \in M \mid e_k(x) \neq 0\}} \subset U_{i_k}.$$

$(e_k)_{\mathbb{N}}$ heißt dann $\mathcal{U}$ untergeordnete (lokal endliche) Zerlegung der Eins.

Beweis: (Idee, für M kompakt.) $\mathcal{U}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung $(U_{i_1}, \dots, U_{i_K})$.

Für jedes $k \in \{1, \dots, K\}$ definiere $\tilde{g}_k : M \to \mathbb{R}_+$ stetig durch

$$\tilde{g}_k(x) := \begin{cases} \operatorname{dist}(x, M \setminus U_{i_k}), & \text{falls } M \setminus U_{i_k} \neq \emptyset, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Finde $\alpha > 0$ mit: $\forall x \in M \, \exists k_x : \tilde{g}_{k_x}(x) > \alpha$. Setze $g_k := (\tilde{g}_k - \frac{\alpha}{2})_+$.

Setze dann $e_k := \frac{g_k}{\sum g_k}$.

Für den allgemeinen Fall schöpfe M durch kompakte Teilmengen aus. □

9.5 Def. und Satz: Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : \Gamma \to (-\infty, \infty]$ heißt integrierbar über Γ, falls es ein Atlas $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ und eine untergeordnete Zerlegung der Eins $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

(i) $f e_k$ ist integrierbar über U_{i_k}

(ii) $\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap U_{i_k}} |f| e_k \, dS < \infty$.

In diesem Fall setzen wir

$$\int_\Gamma f \, dS := \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap U_{i_k}} f e_k \, dS.$$

Das Integral hängt nicht von der Wahl des Atlas oder der untergeordneten Zerlegung der Eins ab.

Beweis (Idee): Falls $(\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \to \tilde{V}_i)_{i \in \tilde{I}}$ ein weiterer Atlas mit untergeordneter Zerlegung der Eins $(\tilde{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist, ~~[illegible]~~ finde eine gemeinsame Verfeinerung $(\hat{U}_i)_{i \in \hat{I}}$ mit Zerlegung der Eins $(\hat{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt. ~~[illegible]~~ 9.3 $\Rightarrow \int_{\Gamma \cap \hat{U}_{k''}} f \tilde{e}_{k'} \hat{e}_{k''} \, dS$ ist wohldefiniert

$$\Rightarrow \sum_{k' \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap \hat{U}_{k''}} f \tilde{e}_{k'} \hat{e}_{k''} \, dS = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap U_{k''}} f e_k \hat{e}_{k''} \, dS$$

$$\Rightarrow \sum_{k'' \in \mathbb{N}} \sum_{k' \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap \hat{U}_{k''}} f \tilde{e}_{k'} \hat{e}_{k''} \, dS = \sum_{k'' \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap U_{k''}} f e_k \hat{e}_{k''} \, dS$$

$$\sum_{k' \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap \tilde{U}_{k'}} f \tilde{e}_{k'} \, dS \qquad \qquad \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma \cap U_{i_k}} f e_k \, dS.$$

Hierbei beachten wir, dass die Überdeckung lokal endlich ist. $\square$

9.6 <u>Bem.:</u> Mit diesen Definitionen lassen sich Mannigfaltigkeiten zu Maßräumen machen; die Konvergenzsätze von Beppo Levi und von Lebesgue gelten analog für das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$, ebenso lassen sich Nullmengen analog beschreiben.