8. Untermannigfaltigkeiten

„Es wird daher, um festen Boden zu gewinnen, zwar eine abstracte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich in geometrischem Gewande darstellen lassen."

Bernhard Riemann

8.1 Def.: $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ heißt d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls zu jedem Punkt $a \in M$ eine Umgebung $a \in U \underset{\text{off}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $V \underset{\text{off}}{\subseteq} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ und ein C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ existieren mit $\varphi(M \cap U) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V$.

Wir nennen φ eine Karte mit Kartengebiet $M \cap U$.

Eine Menge $(\varphi_i)_{i \in I}$ von Karten heißt Atlas für M, falls die Kartengebiete $(M \cap U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung für M bilden.

M heißt C^p bzw. glatt, falls es C^p bzw. glatte Karten gibt.

8.2 Bem.: Die Dimension d in 8.1 ist eindeutig bestimmt:

Seien $a \in M$, $a \in U_i \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $V_i \underset{\text{off}}{\subset} \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R}^{n-d_i}$,

$\varphi_i : U_i \to V_i$ C^1-Diffeomorphismus mit

$\varphi_i(M \cap U_i) = (\mathbb{R}^{d_i} \times \{0\}) \cap V_i$, $i = 0, 1$.

$\Rightarrow \exists\ \varphi_0(a) \in W_0 \underset{\text{off}}{\subset} (\mathbb{R}^{d_0} \times \{0\}) \cap V_0$ mit $\varphi_0^{-1}(W_0) \subset M \cap U_1$

$\Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : W_0 \to W_1 := \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(W_0) \subset (\mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}) \cap V_1$

ist Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{d_0}$ und $\mathbb{R}^{d_1}$

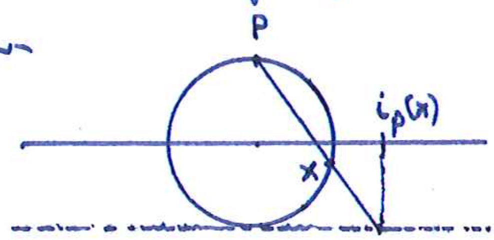
$\Rightarrow D(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(\varphi_0(a)) : \mathbb{R}^{d_0} \to \mathbb{R}^{d_1}$ ist linearer Isomorphismus

$\Rightarrow d_0 = d_1$.

8.3 z.B.: $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit:

Setzen $p := (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$ und definieren

$$i_p : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$$



durch

$$i_p(x) := p + \frac{2}{\|x-p\|_2^2} \cdot (x-p).$$

Es gilt $i_p^2(x) = x$, d.h. $i_p = i_p^{-1}$, und i_p ist C^1-Diffeomorphismus. [Übg]

Weiter gilt $i_p(S^{n-1} \setminus \{p\}) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

i_p heißt Inversion, $i_p|_{S^{n-1} \setminus \{p\}}$ stereographische Projektion.

Entsprechend definiert man $i_{-p} : \mathbb{R}^n \setminus \{-p\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{-p\}$

$\{i_p, i_{-p}\}$ bilden dann einen Atlas für S^{n-1} mit Kartengebieten $S^{n-1} \setminus \{p\}$, $S^{n-1} \setminus \{-p\}$.

Untermannigfaltigkeiten sind Lösungsmengen von Gleichungssystemen, genauer:

8.4 **Satz**: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

a) M ist Untermannigfaltigkeit der Dimension d.

b) Es gibt zu jedem $a \in M$ eine Umgebung $a \in U \underset{\text{off}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ sowie stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \dots, f_{n-d} : U \to \mathbb{R}$ mit

(i) $M \cap U = \{ x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0 \}$

(ii) die Differentiale $Df_1(a), \dots, Df_{n-d}(a) \in \mathbb{R}^{n^*} \cong \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Bew.: a) $\Rightarrow$ b): Sei $a \in M$. Wähle dann eine Karte

$$\varphi : \underset{\ni a}{\overset{\mathbb{R}^n \text{ off}}{U}} \xrightarrow{\text{Diffeom.}} \overset{\mathbb{R}^n}{V} \text{ off}$$

mit $\varphi(M \cap U) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V$.

Setze $f_j := \varphi_{d+j}$, $j = 1, \dots, n-d$, dann sind die f_j stetig differenzierbar.

Es gilt
$$\begin{aligned} M \cap U &= \varphi^{-1}((\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V) \\ &= \{ x \in U \mid \varphi(x) \in (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V \} \\ &= \{ x \in U \mid \varphi_{d+1}(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0 \} \\ &= \{ x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0 \}, \text{ also (i)}. \end{aligned}$$

Weiter ist $D\varphi(a) = \begin{pmatrix} D\varphi_1(a) \\ \vdots \\ D\varphi_n(a) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, hat also vollen Rang

$\Rightarrow Df_1(a), \dots, Df_{n-d}(a)$ lin. unabh.

b) ⇒ a): Sei $a \in M$, U, $f_1, \dots, f_{n-d}$ wie in b).

Sei $L_1, \dots, L_d \in \mathbb{R}^{n^*} \cong \mathbb{R}^n$ lineare Funktionale so dass $L_1, \dots, L_d, Df_1(a), \dots, Df_{n-d}(a)$ linear unabhängig sind.

Definiere $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} L_1(x) \\ \vdots \\ L_d(x) \\ f_1(x) \\ \vdots \\ f_{n-d}(x) \end{pmatrix},$$

dann ist $D\Phi(a) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_d \\ Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_{n-d}(a) \end{pmatrix}$ invertierbar.

Aus dem Satz von der Umkehrabbildung (Ana II, Cor 8.4) folgt, dass es eine Umgebung $a \in W \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$ gibt mit

$\varphi := \Phi|_W : W \to \Phi(W) =: V$ C^∞-Diffeomorphismus.

Wegen (i) gilt

$$\begin{aligned} \varphi(M \cap W) &= \{\Phi(x) \mid x \in M \cap W\} \\ &= \{\Phi(x) \mid x \in W, f_1(x) = \dots = f_{n-d}(x) = 0\} \\ &= (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap \Phi(W) \\ &= (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V. \end{aligned}$$

⇒ φ ist Karte um a. □

8.5 Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar.

$x \in U$ heißt regulärer Punkt, falls $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist (d.h. falls $Df(x)$ Rang m hat).

$y \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert, falls jedes $x \in f^{-1}(y)$ regulärer Punkt ist.

Falls x nicht regulär ist, so heißen x und $f(x)$ singulär.

8.6 Satz: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.

Sei $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert und $M := f^{-1}(c) \neq \emptyset$.

Dann ist $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit der Dimension $d := n-m$.

Bew.: Für $a \in M$ ist $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv $\Rightarrow n \geq m$.

Definiere $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-d} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $F(x) := f(x) - c$, dann

gilt $M = F^{-1}(0)$ und für alle $a \in M$ hat

$$\begin{pmatrix} DF_1(a) \\ \vdots \\ DF_{n-d}(a) \end{pmatrix} = DF(a) = Df(a) \quad \text{Rang } m = n-d,$$

d.h. die $DF_1(a), \dots, DF_{n-d}(a)$ sind linear unabhängig.

Satz 8.4 $\Rightarrow$ M ist Untermannigfaltigkeit der Dimension d. $\square$

8.7 <u>z.B.</u>: (i) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch.

Falls die Quadrik

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\langle x, Ax \rangle}_{= x^t A x} = 1\}$$

nichtleer ist, so ist Q eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Bew.: Definiere $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \langle x, Ax \rangle$,

dann ist $Q = f^{-1}(1)$ und

$Df(x) = 2x^t A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (vgl. Ana II, z.B. 7.3).
$(\xi \mapsto 2x^t A \xi)$

$\Rightarrow$ Für $x \in Q$ ist $Df(x) \neq 0$ und $1 \in \mathbb{R}$ ist reguläre Wert für f.

$\overset{\text{Satz 8.6}}{\Rightarrow}$ Behauptung.

(ii) Die orthogonale Gruppe

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = 1_n\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Bew.: Sei $X := \{S \in M_n(\mathbb{R}) \mid S = S^t\}$, dann ist

$X \subset M_n(\mathbb{R})$ UVR der Dimension $1 + \dots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sei $\Phi: X \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ein Isomorphismus [Warum?]
und definiere $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ durch $f(A) := \Phi(A^t A)$,
dann ist $O(n) = f^{-1}(\Phi(1_n))$.

Außerdem ist f stetig differenzierbar:

$$f(A+T) = \Phi\big((A+T)^t (A+T)\big)$$
$$= \Phi\big(A^tA + A^tT + T^tA + T^tT\big)$$
$$= f(A) + Df(A)(T) + \varphi(T),$$

wo $Df(A) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ gegeben ist durch

$$Df(A)(T) := \Phi(A^tT + T^tA) \quad (\text{dann ist } Df(A) \text{ linear})$$

und $\varphi(T) := \Phi(T^tT)$ die Ungleichung

$$\frac{1}{\|T\|} \cdot \|\varphi(T)\| \leq C \cdot \frac{1}{\|T\|} \cdot \|\Phi\| \cdot \|T\|^2 \xrightarrow{T \to 0} 0 \quad (\text{für ein } C \geq 0)$$

erfüllt.

$Df(A)$ ist surjektiv, falls $A \in O(n)$, denn für $S \in X$ gilt

$$Df(A)\left(\tfrac{1}{2} AS\right) = \Phi\left(\tfrac{1}{2} A^tAS + \tfrac{1}{2} (AS)^tA\right)$$
$$= \Phi\left(\tfrac{1}{2} 1_n S + \tfrac{1}{2} S^t 1_n\right)$$
$$= \Phi\left(\tfrac{1}{2}(S + S^t)\right)$$
$$= \Phi(S).$$

$\Rightarrow \Phi(1_n)$ ist regulärer Wert für f

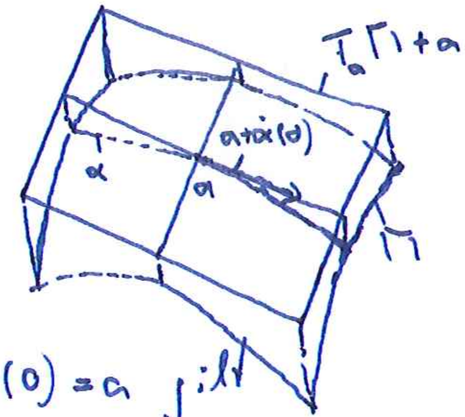
$\overset{\text{Satz 8.6}}{\Longrightarrow}$ $O(n)$ ist Untermannigfaltigkeit der Dimension $\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{n^2 - \frac{n(n+1)}{2} =}$. □

8.8 <u>Def. und Satz:</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, falls es eine stetig differenzierbare Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\alpha(0) = a$ und $\dot\alpha(0) = x$.

$T_a M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ ist Tangentialvektor an M in $a\}$ heißt Tangentialraum von M im Punkt a. Es gilt:

(i) $T_a M$ ist ein d-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR.

(ii) Falls $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ stetig differenzierbar ist mit einem regulären Wert $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ und $M = f^{-1}(c)$, so gilt $T_a M = \ker Df(a)$.



Bew.: (i) $T_a M$ ist VR der Dimension d:

Sei $\varphi : \underset{\underset{a}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{U} \to V$ eine Karte, $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$.

Für $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U$ mit $\alpha(0) = a$ gilt

$(\varphi \circ \alpha)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = D\varphi(\alpha(0)) \circ \dot\alpha(0)$, also

$D\varphi(a)^{-1} (\varphi \circ \alpha)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = \dot\alpha(0)$ und

$\beta := \varphi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V$ ist stetig differenzierbar

Dann gilt

$$T_a\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \dot\alpha(0) \text{ für eine stetig differenzierbare Kurve } \alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Gamma \text{ mit } \alpha(0)=a\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \dot\alpha(0) \text{ für eine stetig differenzierbare Kurve } \alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Gamma\cap U \text{ mit } \alpha(0)=a\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = D\varphi(a)^{-1}\dot\beta(0) \text{ für eine stetig differenzierbare Kurve } \beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\to(\mathbb{R}^d\times\{0\})\cap V \text{ mit } \beta(0)=\varphi(a)\}.$$

$$\Rightarrow D\varphi(a)(T_a\Gamma) = \{y \in \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d} \mid y = \dot\beta(0) \text{ für eine stetig differenzierbare Kurve } \beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\to(\mathbb{R}^d\times\{0\})\cap V \text{ mit } \beta(0)=\varphi(a)\}$$

$$= \mathbb{R}^d\times\{0\}. \quad [\text{Warum?}]$$

$D\varphi(a)^{-1}$ ist linear $\Rightarrow T_a\Gamma \underset{(*)}{=} D\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d\times\{0\}) \cong \mathbb{R}^d$.

(ii) Satz 8.5 und 8.6 $\Rightarrow$ Es gibt eine Karte φ mit

$$D\varphi(a) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_d \\ Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_m(a)\end{pmatrix}$$ für $L_1,\dots,L_d \in \mathbb{R}^{n*}$ geeignet (insbesondere ist $D\varphi(a)$ invertierbar).

Nach (i) gilt dann $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_d \\ Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_m(a)\end{pmatrix}(T_a\Gamma) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_d \\ Df(a)\end{pmatrix} = \mathbb{R}^d\times\{0\}$

$\Rightarrow T_a\Gamma = \ker Df(a)$

$\subset$: trivial

$\supset$: $x \in \ker Df(a) \Rightarrow D\varphi(a)(x) \in \mathbb{R}^d\times\{0\} \Rightarrow x \in D\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d\times\{0\}) \underset{(*)}{=} T_a\Gamma$. $\square$

8.27.B (i) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und

$a \in Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Ax\rangle = 1\} =: f^{-1}(1)$,

wo $f(x) = \langle x, Ax\rangle$.

Wegen $Df(a) = 2x^t A$ und 8.8 (ii) gilt

$T_a(M) = \ker Df(a) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid a^t A v = 0\}$;

für den affinen Tangentialraum gilt

$a + T_a M = \{a+v \mid a^t A v = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid a^t A v = 1\}$.

(ii) Der Tangentialraum an $O(n)$ in 1_n:

$O(n) = f^{-1}(\underline{f}(1_n))$, wo $\underline{f} : X = \{S \in M_n(\mathbb{R}) \mid S = S^t\} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

und $f(A) = \underline{f}(A^t A)$.

Es gilt $Df(A)(T) = \underline{f}(A^t T + T^t A)$,

also $Df(1_n)(T) = \underline{f}(T + T^t)$ und

$T_{1_n} O(n) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid \underline{f}(T + T^t) = 0\}$

$= \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid T + T^t = 0\} = \{$schiefsymmetrische $n\times n$ Matrizen$\}$.

Für H schiefsymmetrisch definiert die Exponentialabbildung eine Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to O(n)$ durch $\alpha(t) := \exp(t \cdot H)$;

es gilt $\alpha(0) = 1_n$ sowie $\dot\alpha(0) = H$:

$H = -H^t \Rightarrow HH^t - H^tH = 0 \Rightarrow e^{tH}(e^{tH})^t = e^{tH} e^{tH^t} = e^{t(H+H^t)} = e^0 = 1_n$, ebenso $(e^{tH})^t e^{tH} = 1_n$, also ist $\alpha(t) \in O(n)$!

$\alpha(0) = e^0 = 1_n$ ist klar.

Aus II, Blatt 9, A.4 $\Rightarrow \dot\alpha(t) = He^{tH} \Rightarrow \dot\alpha(0) = H$. $O(n)$ ist eine Liegruppe.

8.10 Def. und Satz: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit und $a \in M$, so definieren wir den Normalenraum von M in a als

$$N_a M := \underbrace{T_a M^{\perp}}_{\substack{\text{orthogonales Komplement von } T_a M \text{ in } \mathbb{R}^n \\ (\text{bzgl. } \langle \cdot , \cdot \rangle)}}$$

Es ist $\dim N_a M = \dim \mathbb{R}^n - \dim T_a M = n-d$.

Falls $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ist mit einem regulären Wert $c \in \mathbb{R}^m$ und $M = f^{-1}(c)$, so bilden die Gradienten $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_m(a) \in N_a M$ eine Basis des Normalenraums.

Bew.: $Df(a) = \begin{pmatrix} Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_m(a) \end{pmatrix}$ und nach 8.8 (ii) ist ~~$T_a M = \ker Df(a)$~~

$$\overset{\shortparallel}{\left(\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_m(a)\right)^{t}}$$

$$T_a M = \ker Df(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Df(a)\, x = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f_i(a), x \rangle = 0,\ i = 1, \dots, m\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp \operatorname{span}\{\nabla f_i(a) \mid i = 1, \dots, m\}\}$$

$$= \operatorname{span}\{\nabla f_i(a) \mid i = 1, \dots, m\}^{\perp}$$

c regulär $\Rightarrow$ $Df(a)$ hat Rang m $\Rightarrow$ $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_m(a)$ lin. unabh.
$\Rightarrow$ $\nabla f_i(a)$, $i = 1, \dots, m$ bilden Basis von $T_a M^{\perp} = N_a M$. $\square$

8.11 Def.: Sei $\Omega \subset_{\text{off}} \mathbb{R}^d$, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung.

γ heißt Immersion, falls für alle $u \in \Omega$ $D\gamma(u) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist (äquivalent, falls $D\gamma(u)$ Rang d hat).

Ω heißt Parameterbereich und $\gamma(\Omega)$ die Spur von γ, γ heißt auch reguläre Fläche im $\mathbb{R}^n$.

$\partial_1 \gamma(u), \dots, \partial_d \gamma(u) \in \mathbb{R}^n$ sind dann linear unabhängig.

$T_u \gamma := \operatorname{span}\{\partial_1 \gamma(u), \dots, \partial_d \gamma(u)\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialraum von γ in u.

Zwei Immersionen ~~Falls~~ $\gamma_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1$ ~~zwei Immersionen~~ heißen äquivalent, falls es einen C^1-Diffeomorphismus $T : \Omega_0 \to \Omega_1$ gibt mit

$$\gamma_0 = \gamma_1 \circ T.$$

8.12 Lemma: Es sei $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset_{\text{off}} \mathbb{R}^d$) eine Immersion.

Dann existieren zu jedem $u_0 \in \Omega$ eine offene Umgebung $u_0 \in \Omega_0 \subset_{\text{off}} \Omega$ und eine Koordinatenpermutation $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass $P \circ \gamma|_{\Omega_0}$ äquivalent ist zu einer Immersion $\tilde\gamma : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$, $\Omega_1 \subset_{\text{off}} \mathbb{R}^d$, mit $\tilde\gamma(x) = (x, \tilde\gamma_{d+1}(x), \dots, \tilde\gamma_n(x))^T$, d.h. es gibt einen C^1-Diffeomorphismus $T : \Omega_0 \to \Omega_1$ mit

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \\ \Omega_0 \arrow[ur, "P\gamma"] \arrow[r, "T"] & \Omega_1 \arrow[u, "\tilde\gamma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{pmatrix} \tilde\gamma(x) \\ \uparrow \\ x \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $\gamma(\Omega_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Bew.: $D\gamma(u_0)$ hat Rang d, daher existiert eine Koordinatenpermutation $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so dass für $D(P\circ\gamma)(u_0) = P\circ D\gamma(u_0)$ die ersten d Zeilen linear unabhängig sind. Insbesondere ist die Abbildung $\begin{pmatrix}(P\circ\gamma)_1\\ \vdots \\ (P\circ\gamma)_d\end{pmatrix}: \Omega \to \mathbb{R}^d$ in u_0 invertierbar differenzierbar.

Satz von der Umkehrabbildung $\Rightarrow \exists\, u_0 \in \Omega_0 \subset_{\text{off}} \Omega$ und $\Omega_1 \subset_{\text{off}} \mathbb{R}^d$ so dass

$$T := \begin{pmatrix}(P\circ\gamma)_1\\ \vdots \\ (P\circ\gamma)_d\end{pmatrix}\Bigg|_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \Omega_1$$ ein Diffeomorphismus ist.

Definiere $\tilde\gamma := P\circ\gamma\circ T^{-1} : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$, dann gilt für $i \in \{1,\dots,d\}$

$$\tilde\gamma_i(x) = (P\circ\gamma)_i \circ T^{-1}(x) = (T\circ T^{-1})_i(x) = x_i,$$

d.h. $\tilde\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ \tilde\gamma_{d+1}(x) \\ \vdots \\ \tilde\gamma_n(x)\end{pmatrix}$, $x \in \Omega_1$.

$\tilde\gamma$ ist Immersion, denn $D\tilde\gamma(x) = \begin{pmatrix} 1_d \\ * \end{pmatrix}$ Rang d hat für alle $x \in \Omega_1$.

$\gamma(\Omega_0)$ ist d-dimensionale Untermannigfaltigkeit:

$$\varphi : \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto P^{-1}\left(\tilde\gamma\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{d+1} \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\right)$$

ist lokal invertierbar [warum?]; die lokale Inverse bildet einen Atlas für $\gamma(\Omega_0)$.

□

8.13 <u>Def. u. Satz:</u> Sei $\Omega \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^1$ und $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^2$ eine Immersion.

γ heißt <u>Einbettung</u>, falls $\Omega \xrightarrow{\gamma} \gamma(\Omega)$ ein Homöomorphismus ist.

In diesem Falle ist $\gamma(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ eine Untermannigfaltigkeit.

Je zwei Einbettungen $\gamma_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^2$, $i = 0,1$,

mit derselben Spur $\gamma_0(\Omega_0) = \gamma_1(\Omega_1)$ sind äquivalent.

Bew.: Nach Lemma 8.12 ist $\gamma(\Omega)$ lokal eine Untermannigfaltigkeit, damit aber auch global. [Was heißt das genau?]

$T := \gamma_1^{-1} \circ \gamma_0 : \Omega_0 \to \Omega_1$ ist Homöomorphismus mit $\gamma_0 = \gamma_1 \circ T$.

z. z.: T, T^{-1} sind C^1. Dies folgt ebenfalls aus 8.12. □

8.14 <u>z. B.:</u> $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t(t^2-1) \end{pmatrix}$ ist eine Immersion, aber keine Einbettung.