7. Maß und Integration

„... nun, unser Mathematikprofessor war 2 Meter groß, und hat nicht oft gelacht." Vernissageparty a. D. Stürenburg

7.1 Erinnerung: Sei X eine Menge.

$\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Topologie auf X, falls gilt:

(i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$

(ii) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$

(iii) $U_i \in \mathcal{T},\ i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum.

Falls $(X_j, \mathcal{T}_j)$, $j = 1,2$, topologische Räume sind und $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung, so heißt f stetig, falls gilt: $U \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$.

7.2 Def.: Sei X eine Menge.
$\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra auf X, falls gilt:

(i) $X \in \Sigma$

(ii) $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$

(iii) $A_n \in \Sigma,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

(X, Σ) heißt messbarer Raum, die Elemente von Σ heißen messbare Mengen.
Falls (X_j, Σ_j), $j = 1,2$, messbare Räume sind, so heißt $f : X_1 \to X_2$ messbar, falls gilt: $A \in \Sigma_2 \Rightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

7.1.3 Bem.: (i) σ-Algebren sind abgeschlossen bzgl. abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten.

(ii) (X_j, Σ_j), $j = 1, 2, 3$, meßbare Räume, $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ meßbar, dann ist $g \circ f : X_1 \to X_3$ meßbar.

7.1.4 Prop.: Sei X eine Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{F}$ enthält; diese nennen wir die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra und schreiben $\Sigma(\mathcal{F})$.

Bew.: Setze $\Omega := \{\Gamma \subset \mathcal{P}(X) \mid \Gamma$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{F} \subset \Gamma\}$.

Dann ist $\Omega \neq \emptyset$, denn $\mathcal{P}(X) \in \Omega$.

Setze $\Sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\Gamma \in \Omega} \Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, dann gilt $\mathcal{F} \subset \Sigma(\mathcal{F})$.

Ist $\Gamma' \subset \mathcal{P}(X)$ eine weitere σ-Algebra mit $\mathcal{F} \subset \Gamma'$, so gilt $\Sigma(\mathcal{F}) \subset \Gamma'$.

Bleibt zu zeigen: $\Sigma(\mathcal{F})$ ist σ-Algebra.

(i) $X \in \Sigma(\mathcal{F})$, denn $X \in \Gamma$ für jedes $\Gamma \in \Omega$.

(ii) $A \in \Sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow A \in \Gamma$ für jedes $\Gamma \in \Omega \Rightarrow X \setminus A \in \Gamma$ für jedes $\Gamma \in \Omega$
$\Rightarrow X \setminus A \in \Sigma(\mathcal{F})$.

(iii) ebenso. $\square$

7.5 <u>Bem.</u>: Die entsprechende Aussage für topologische Räume beweist man analog. (Übung.)

7.6 <u>Def.</u>: (i) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen $\Sigma(\mathcal{T})$ die σ-Algebra der Borelmengen auf X und schreiben $\mathcal{B}_X$ für $\Sigma(\mathcal{T})$.

(ii) $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, dann heißt $f: X \to Y$ Borel, falls f meßbar ist bzgl. $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{B}_Y$.

7.7 <u>Bem.</u>: Offene und abgeschlossene Mengen sind Borel, und ebenso F_σ's (abzählbare Vereinigungen von abg. Mengen) und G_δ's (abzählbare Durchschnitte von off. Mengen).
z.B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist dichtes G_δ, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nicht.

7.8 <u>Prop.</u>: Sei (X, Σ) ein meßbarer Raum und $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum; sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.

(i) $\Omega := \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \Sigma\}$ ist σ-Algebra auf Y.

(ii) Falls $f^{-1}(E) \in \Sigma$ für jedes $E \in \mathcal{T}$, so ist f meßbar.

(iii) Falls $Y = \mathbb{R}$ und $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \Sigma$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist f meßbar.

(iv) (iii) gilt analog für $Y = [-\infty, \infty]$ und $(\alpha, \infty]$, wobei $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und $\{(\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ erzeugte Topologie ist.

Bew.: (i) $f^{-1}(Y) = X$,

$f^{-1}(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E)$,

$f^{-1}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2) \cup \ldots$

(ii) Setze $\Omega := \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \Sigma\}$ (wie in (i)),

dann ist $\mathcal{T} \subset \Omega$, also $\mathcal{B}_Y \subset \Omega$ (denn Ω ist σ-Algebra)

$\Rightarrow f^{-1}(E) \in \Sigma$ für jedes $E \in \mathcal{B}_Y$

$\Rightarrow f$ ist meßbar

(iii) Wieder sei $\Omega := \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \Sigma\}$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ wähle $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha$ mit $\alpha_n \xrightarrow{n \to \infty} \alpha$.

Dann ist $(\alpha_n, \infty) \in \Omega$ für jedes n, also auch

$(-\infty, \alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, \alpha_n] = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, \infty) \right) \in \Omega$ (nach (i) und 7.7)

$\Rightarrow (-\infty, \alpha) \cap (\beta, \infty) \in \Omega$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Für jedes $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ist $U \in \Omega$ (denn $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\gamma_n, \delta_n)$).

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \Omega$

$\Rightarrow f$ ist meßbar.

(iv) Übung. $\square$

7.9 **Prop.:** Sei (X,Σ) ein meßbarer Raum und $f_n : X \to (-\infty,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge meßbarer Funktionen. Dann sind

$$g := \sup_{n \geq 0} f_n \quad \text{und} \quad h := \limsup_n f_n$$

meßbar.

Bew.: $g^{-1}((\alpha,\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{f_n^{-1}((\alpha,\infty])}_{\in \Sigma} \in \Sigma$

$\overset{7.8}{\Rightarrow}$ g ist meßbar.

Ebenso für inf an Stelle von sup.

Weiter gilt $h = \limsup f_n = \underbrace{\inf_{k\geq 0} \underbrace{\sup_{n \geq k} f_n}_{\text{meßbar}}}_{\text{meßbar}}$.

□

7.10 **Cor.:** Seien (X,Σ) und $f_n : X \to (-\infty,\infty]$ meßbar wie oben.

(i) Falls $f_n \to f$ punktweise, so ist f meßbar.

(ii) Falls $g, h : X \to (-\infty,\infty]$ meßbar sind, so auch $\max\{g,h\}$, $\min\{g,h\}$, also insbesondere g_+ und g_-.

Bew.: $f = \limsup f_n$ (warum?); $\max\{g,h\} = \sup\{h, g, g, \dots\}$.

Benutze 7.9.

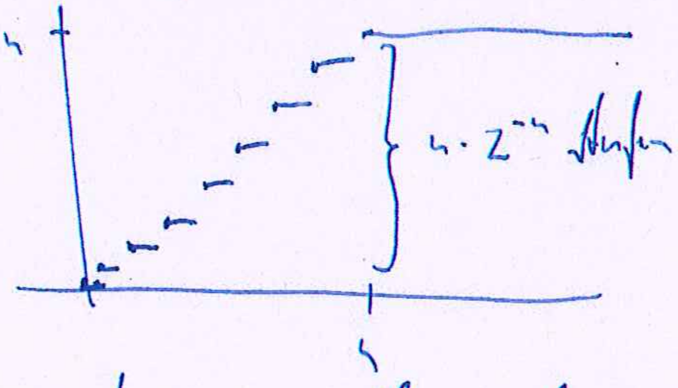
□

7.11 Def.: Sei (X, Σ) ein meßbarer Raum.
$f: X \to (-\infty, \infty)$ heißt einfach, falls $f(X)$ endlich ist.

7.12 Bem.: Sei f einfach, dann ist $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ für
$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = f(X)$ und $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$.
f ist meßbar genau dann, wenn A_i meßbar ist, $i = 1, \dots, n$.

7.13 Prop.: Sei (X, Σ) ein meßbarer Raum und $f: X \to [0, \infty]$ meßbar.
Dann existieren einfache meßbare Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$,
mit $0 \le f_0 \le f_1 \le \dots$ und $f_n \to f$ punktweise.

Beweis: Definiere $\varphi_n: [0, \infty] \to \mathbb{R}$ durch



Dann ist φ_n meßbar, also auch $f_n := \varphi_n \circ f$.
$f_n \nearrow f$ punktweise: Übung. $\square$

7.14 <u>Def.:</u> Sei (X, Σ) ein meßbarer Raum.
Ein Maß auf (X, Σ) ist eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$, welche abzählbar additiv ist, d.h. falls $A_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte meßbare Mengen sind, so gilt $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$.
(X, Σ, μ) heißt dann Maßraum.
Falls $\mu(X) = 1$, so heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß und (X, Σ, μ) Wahrscheinlichkeitsraum.

7.15 <u>Prop.:</u> Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum.

(i) $A, B \in \Sigma$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) $A_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, mit $A_0 \subset A_1 \subset \dots$, dann gilt $\mu(A_i) \xrightarrow{i \to \infty} \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j)$.

(iii) $A_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, mit $A_0 \supset A_1 \supset \dots$, und $\mu(A_0) < \infty$, dann gilt $\mu(A_i) \xrightarrow{i \to \infty} \mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i)$.

Bew.: (i) $\mu(B) = \mu(\underbrace{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i}_{A_0 := A,\ A_1 := B \setminus A,\ A_i := \emptyset \text{ für } i \geq 2}) = \sum_i \mu(A_i) \geq \mu(A)$.

(ii) Setze $B_0 := A_0$ und $B_{i+1} := A_{i+1} \setminus A_i$, dann sind die B_i meßbar und paarweise disjunkt und $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i)$; außerdem gilt $\mu(A_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu(B_i) \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i)$.

(iii) ähnlich.

7.16 z.B. 1 (i) $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ mit $\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$

ist Maßraum für jede Menge X.

(ii) $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$ mit $\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$

ist Wahrscheinlichkeitsraum für jede Menge X und $x_0 \in X$.

(iii) $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ mit $\mu(E) := \begin{cases} |E|, & E \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$

ist Maßraum für jede Menge X (μ heißt Zählmaß).

(iv) Sei μ das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und

$A_i := \{i, i+1, \dots\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$,

aber $\mu(A_i) = \infty$, $i \in \mathbb{N}$, also $\mu(A_i) \not\to \mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i)$.

(vgl. 7.15(iii))

(v) $\hat{\Lambda} := \{E \subset \mathbb{R}^n \mid \chi_E \text{ ist lokal integrierbar}\}$

$= \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E \cap K \text{ ist messbar i.S.v. Def. 3.1 für jedes kompakte } K \subset \mathbb{R}^n\}$

ist σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$:

a) $X \in \hat{\Lambda}$, denn Kompakta sind Lebesgue messbar.

b) Sei $E \in \hat{\Lambda}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow \chi_{K \cap E}$ ist integrierbar

$\Rightarrow \chi_{(X \setminus E) \cap K} = \chi_{K \setminus (K \cap E)} = \chi_K - \chi_{K \cap E}$ ist integrierbar

$\Rightarrow X \setminus E \in \hat{\Lambda}$ integrierbar nach 3.3

c) abzählbare Vereinigungen: ähnlich; benutze 3.3 und 4.7.

$\hat{\Lambda}$ enthält die Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$ nach 4.[redacted]8.

$\lambda : \hat{\Lambda} \to [0,\infty]$ gegeben durch

$$\lambda(E) := \begin{cases} \nu(E), & \chi_E \text{ integrierbar} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist Maß auf $\mathbb{R}^n$, vgl. Bem. 4.[redacted]8.

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f$ ist messbar i.S.v. Def. 7.[redacted]2

(Benutze 7.[redacted]8 und Cor. [redacted]7.10 sowie 4.[redacted]7.)

7.[redacted]17 Def.: Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum.

(i) Für eine einfache, messbare Funktion $s: X \to [0,\infty)$, $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ mit A_i messbar, definieren wir

$$\int s \, d\mu := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \mu(A_i).$$

(ii) Für $f: X \to [0,\infty]$ messbar definieren wir

$$\int f \, d\mu := \sup\left\{ \int s \, d\mu \;\middle|\; s \text{ ist einfach, messbar, } 0 \le s \le f \right\}.$$

(vgl. [redacted]7.13)

(iii) Falls f nicht notwendig positiv, aber $\int f_- \, d\mu < \infty$, so setzen wir $\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$.

Ebenso für komplexwertige Funktionen.

(iv) Wir schreiben $\mathcal{L}^1(\mu) := \{ f: X \to \mathbb{R} \mid \int |f| \, d\mu < \infty \}$.

$\mathcal{L}^1(\mu)$ ist VR und $f \mapsto \int f \, d\mu$ ist lineares Funktional.

(warum?)

(v) Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ setzen wir $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$.

7.18 Satz: Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \int f\,d\lambda .$$

Bew.: Klar für einfache Funktionen (Linearität); benutzen dann 7.13 und Beppo Levi für f_+ und f_-. □

7.19 Bem.: Haben vorher das Lebesgue Integral definiert und so das Lebesgue Maß erhalten. Der Satz zeigt, dass man umgekehrt auch das Integral aus dem Lebesgue Maß erhält.

7.20 Def.: Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Wir definieren noch

$$\mathcal{N} := \{ f \in \mathcal{L}^1(\mu) \mid \int |f|\,d\mu = 0 \}$$

und

$$L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\mathcal{N} .$$

Die folgenden Sätze 7.21 – 7.24 beweist man wie in Abschnitt 4:

7.21 Satz: $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ ist vollständiger normierter VR (Banachraum). □

7.22 **Satz** (von Lebesgue über monotone Konvergenz):
Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge meßbarer Funktionen mit $0 \le f_0 \le f_1 \le \dots$.
Dann ist $f := \lim_n f_n : X \to [0,\infty]$ meßbar und es gilt $\int f_n \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, d\mu$. □

7.23 **Lemma** (Fatou): Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : X \to [0,\infty]$ eine Folge meßbarer Funktionen.
Dann gilt $\int (\liminf f_n) d\mu \le \liminf \int f_n \, d\mu$. □

7.24 **Satz** (von Lebesgue über dominierte Konvergenz):
Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine punktweise konvergente Folge meßbarer Funktionen.
Sei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ eine Funktion mit $|f_n| \le g$.
Dann ist $\lim f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int (\lim f_n) \, d\mu.$$ □

Haben gesehen, dass ein Maß μ ein lineares Funktional auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ induziert.
Umgekehrt lassen sich unter geeigneten Umständen Funktionale auf Funktionenräumen durch Integrale darstellen.

7.25 Satz (Darstellungssatz von Riesz):

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $\Phi : C_c(X) \to \mathbb{R}$ ein positives ($f \geq 0 \Rightarrow \Phi(f) \geq 0$) lineares Funktional.

Dann existieren eine σ-Algebra Σ auf X mit $\mathcal{B}_X \subset \Sigma$ und ein Maß μ auf (X, Σ) mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\Phi(f) = \int f \, d\mu$ für $f \in C_c(X)$.

(ii) $\mu(K) < \infty$ für $K \subset X$ kompakt.

(iii) Für $E \in \Sigma$ gilt $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V \in \mathcal{T}\}$.

(iv) Für $E \in \Sigma$ mit $\mu(E) < \infty$ gilt
$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ kompakt}\}$.

(v) Falls $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0$, $A \subset E$, so gilt $A \in \Sigma$.

Außerdem ist μ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. □

Bem.: a) (iii) und (iv): μ ist reguläres Borelmaß (von außen und von innen regulär).
(v): μ ist "vollständig", d.h. Teilmengen von Nullmengen sind messbar.

b) Der Satz erlaubt es, das Lebesgue Integral / Maß aus dem Riemannintegral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu gewinnen.