"It's not a boring place to be, the mathematical world. It's an extraordinary place; it's worth spending time there."

Marcus du Sautoy

6. Der Transformationssatz

Erinnerung: $T : [a,b] \to [c,d]$ bijektiv und stetig differenzierbar, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(T(x)) \frac{dT}{dx}(x)\,dx = \int_{T(a)}^{T(b)} f(t)\,dt,$$

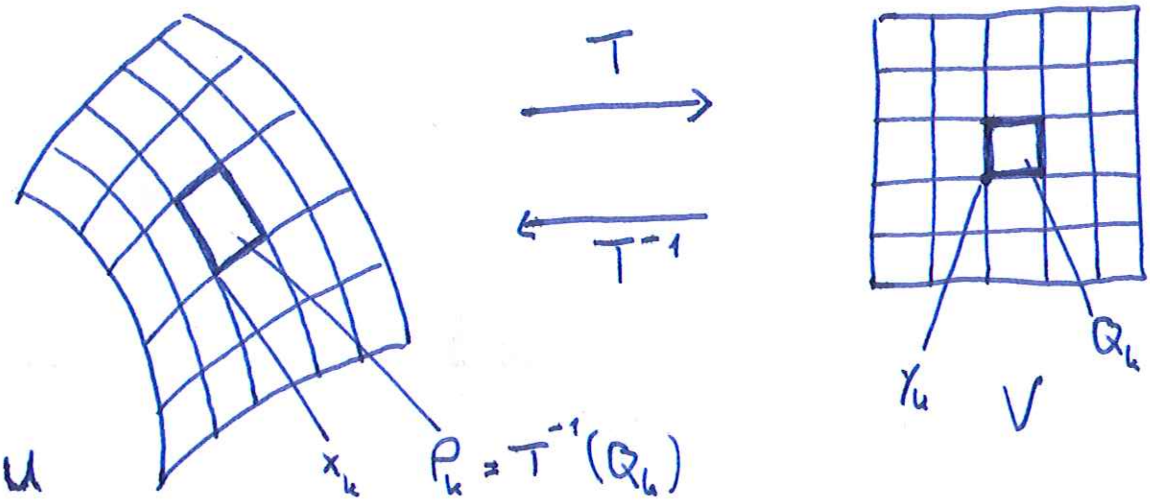
also

$$\int_{[a,b]} f(T(x))\, |DT(x)|\, dx = \int_{[c,d]} f(t)\,dt.$$

6.1 Satz. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus; sei $f : V \to [-\infty, \infty]$ eine Funktion. Dann ist f über V integrierbar genau dann, wenn $(f \circ T) \cdot |\det(DT)|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U f(T(x)) \cdot |\det(DT)(x)|\, dx = \int_V f(y)\, dy.$$

Strategie: Sei V ein Quader und f eine Treppenfunktion; V sei Vereinigung von Quadern Q_k mit $f|_{\mathring{Q}_k}$ konstant.



T^{-1} ist differenzierbar, d.h. für $y \in V$ gilt

$$T^{-1}(y+l) = T^{-1}(y) + D(T^{-1})(y)\,l + \varphi(l),$$

wo $D(T^{-1})(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und invertierbar ist und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit $\frac{1}{\|l\|_2} \cdot \varphi(l) \xrightarrow{l \to 0} 0$.

Setze $\tilde{P} := P_k - x_k$,

$$\tilde{Q} := Q_k - y_k = P(q_1 \cdot e_1, \ldots, q_n \cdot e_n)$$

Parallelotop mit Kantenlängen q_i; vgl. 3.15.

Es gilt

$$\tilde{P} = P_k - x_k$$

$$= T^{-1}(Q_k) - T^{-1}(y_k)$$

$$= T^{-1}(y_k + \tilde{Q}) - T^{-1}(y_k)$$

$$\overset{(*)}{\approx} T^{-1}(y_k) + D(T^{-1})(y_k)(\tilde{Q}) - T^{-1}(y_k)$$

$$= D(T^{-1})(T(x_k))(\tilde{Q})$$

$$\overset{\text{Ana II, Cor 8.4}}{=} (DT(x_k))^{-1}(\tilde{Q}).$$

$$\Rightarrow v(P_k) \overset{\text{Translations-invariant}}{=} v(\tilde{P})$$

$$\approx v\left((DT(x_k))^{-1}(\tilde{Q})\right)$$

$$= v\left((DT(x_k))^{-1}(P(q_1 \cdot e_1, \ldots, q_n \cdot e_n))\right)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} |q_1| \cdot \ldots \cdot |q_n| \cdot v\left((DT(x_k))^{-1}(P(e_1, \ldots, e_n))\right)$$

$$= v(Q_k) \cdot v\left(P\left((DT(x_k))^{-1}(e_1), \ldots, (DT(x_k))^{-1}(e_n)\right)\right)$$

$$\overset{3.15}{=} v(Q_k) \cdot \left|\det (DT(x_k))^{-1}\right|,$$

also

$$v(Q_k) \approx |\det DT(x_k)| \cdot v(P_k).$$

Wir erhalten

$$\int_V f(y)\,dy = \sum_k f(y_k)\cdot v(Q_k)$$

$$\approx \sum_k f(T(x_k))\cdot|\det DT(x_k)|\cdot v(P_k)$$

$$\approx \int_U f\circ T(x)\,|\det DT(x)|\,dx.$$

Müssen sorgfältig kontrolliert werden

6.2 <u>Lemma</u>: Seien T, U, V wie in 6.1, $N \subset V$ eine Nullmenge. Dann ist $T^{-1}(N)$ eine Nullmenge.

Beweisidee: Man darf $N \subset K \subset V$ für ein kompaktes K annehmen; benutze dann, dass $T^{-1}|_K$ Lipschitz ist, sowie Bem. 3.11 (N lässt sich durch abzählbar viele Quader mit kleinem Gesamtvolumen überdecken.) □

6.3 <u>Lemma</u>: Sei $P \subset U$ ein kompakter Teilquader, so dass $Q := T(P) \subset V$ ein kompakter Quader ist. Dann gilt

$$\min_{x\in P}|\det DT(x)|\cdot v(P) \le v(Q) \le \max_{x\in P}|\det DT(x)|\cdot v(P).$$

Bew. benutzt Satz 3.15 und Lemma 6.2, sowie Kompaktheit von P und Stetigkeit von $|\det DT(x)|$. □

6.4 <u>Prop.</u>: Der Transformationssatz gilt für $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \subset V$.

Bew. (Skizze): Wegen Linearität und Lemma 6.2 genügt es, den Satz für $f = \chi_Q$ zu beweisen, wo $Q \subset V$ ein kompakter Quader ist.

Integrierbarkeit von $\chi_Q \circ T(.) \cdot |\det DT(.)|$ folgt aus Stetigkeit von $|\det DT(.)|$ und Kompaktheit von $T^{-1}(Q)$ ($\chi_Q \circ T$ verschwindet außerhalb von $T^{-1}(Q)$).

Zu zeigen bleibt daher:

$$\int_{T^{-1}(Q)} |\det DT(x)|\, dx = \int_Q 1\, dy.$$

Sei $\varepsilon > 0$. $|\det D(T^{-1})|^{-1}$ ist gleichmäßig stetig auf Q, daher existieren kompakte Quader $Q_1, \dots, Q_N \subset Q$ so dass

(i) $Q = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$

(ii) $Q_i \cap Q_{i'}$ ist Nullmenge falls $i \neq i'$

(iii) $\max_{y \in Q_i} |\det D(T^{-1})(y)|^{-1} - \min_{y \in Q_i} |\det D(T^{-1})(y)|^{-1} \leq \varepsilon$.

Wegen $D(T^{-1})(T(x)) = (DT(x))^{-1}$ gilt

$|\det D(T^{-1})(T(x))|^{-1} = |\det DT(x)|$, also für $P_i := T^{-1}(Q_i)$

$$(*) \quad \max_{x\in P_i} |\det DT(x)| - \min_{x\in P_i} |\det DT(x)| \le \varepsilon .$$

Damit gilt

$$\left| \int_{P_i} |\det DT(x)|\,dx - v(Q_i) \right| \overset{(*),6.3}{\le} \varepsilon \cdot v(P_i), \quad i \in \{1,\dots,\nu\},$$

also

$$\int_{T^{-1}(Q)} |\det DT(x)|\,dx \overset{(ii),6.2}{=} \sum_{i=1}^{\nu} \int_{P_i} |\det DT(x)|\,dx$$

$$\underset{\varepsilon\cdot\sum v(P_i)}{=} \sum_{i=1}^{\nu} v(Q_i)$$

$$\overset{(ii)}{=} v(Q)$$

und damit

$$\left| \int_{T^{-1}(Q)} |\det DT(x)|\,dx - v(Q) \right| \overset{(ii),6.2}{\le} \varepsilon \cdot v(T^{-1}(Q)). \qquad \square$$

Bew. (Skizze) von 6.1: Sei f integrierbar über V.

Konstruiere Treppenfunktionen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ mit:

(i) $\operatorname{supp} \varphi_k \subset V$

(ii) $\|f_V - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(iii) es gibt eine Nullmenge $N \subset V$ mit

$$\varphi_k \xrightarrow{k\to\infty} f_V \text{ punktweise auf } V\setminus N.$$

(Für (iii) gehe zu einer Teilfolge über und benutze 4.3.)

Nach Prop. 6.4 gilt

$$\|(\varphi_k \circ T)\cdot|\det(DT)| - (\varphi_l \circ T)\cdot|\det(DT)|\|_1$$

$$\overset{\text{integrierbar nach 6.4}}{=} \int_U |\varphi_k\circ T - \varphi_l \circ T|\cdot|\det(DT)|\,dx$$

$$\overset{6.4}{=} \int_V |\varphi_k - \varphi_l|\,dy$$

$$= \|\varphi_k - \varphi_l\|_1,$$

die Funktionen $((\varphi_k\circ T)\cdot|\det(DT)|)_{k\in\mathbb{N}}$ bilden also eine Cauchy Folge bzgl. $\|.\|_1$.

Weiter gilt

$$(\varphi_k \circ T) \cdot |\det(DT)| \xrightarrow{k\to\infty} (f \circ T)|\det(DT)|$$

punktweise fast überall, d.h. auf $U \setminus \underbrace{T^{-1}(N)}_{\text{Nullmenge nach 6.2}}$.

Nach Satz 4.3 ist dann $(f\circ T)\cdot|\det(DT)|$ integrierbar über U und

$$\int_U (f\circ T)|\det(DT)|\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_U (\varphi_k \circ T)\cdot|\det(DT)|\,dx$$

$$\overset{6.4}{=} \lim_{k\to\infty} \int_V \varphi_k \,dy$$

$$\overset{4.3}{=} \int_V f \,dy.$$

Die Rückrichtung geht analog mit T^{-1} an Stelle von T. $\square$

6.5 z.B.: (i) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die affine Transformation

$$x \mapsto T(x) := Ax + b.$$

Dann gilt $DT(x) = A$, $x \in \mathbb{R}^n$ (vgl. Ana II), und f ist über $K \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar genau dann, wenn $f \circ T$ über $T^{-1}(K)$ integrierbar ist, und es gilt

$$|\det A| \cdot \int_{T^{-1}(K)} f(Ax+b)\, dx = \int_K f(y)\, dy.$$

(Beachte, dass $(f \cdot \chi_K) \circ T = (f \circ T) \cdot \chi_{T^{-1}(K)}$.)

Für $A \in O(n)$ (orthogonale Matrix) gilt

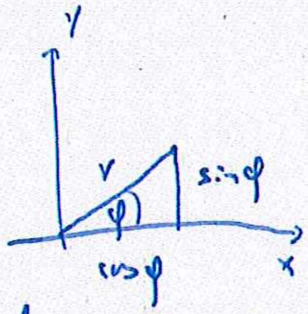
$$v(T(K)) = v(K)$$

("Bewegungsinvarianz" des Lebesguemaßes).

(ii) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$P_2 : (0,\infty) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\} \quad \text{bijektiv.}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$



Es ist $DP_2\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{pmatrix}$ (vgl. Ana II, z.B. 8.6(ii))

und $\det DP_2\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = r > 0$

$\Rightarrow DP_2\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ ist invertierbar

$\overset{\text{Ana II, Cor. 8.4}}{\Rightarrow} P_2$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar gilt nun

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0]\times\{0\}} f(x,y)\, d(x,y)$$

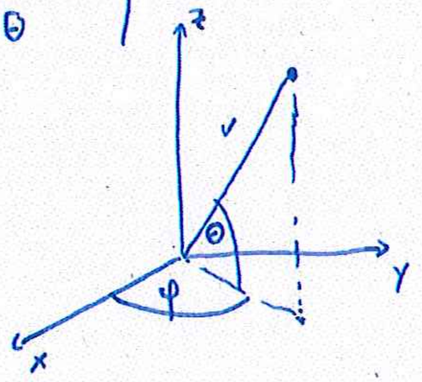
$$= \int_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)} f(P(r,\varphi)) \cdot r \, d(r,\varphi)$$

$$= \int_{(0,\infty)} r \left(\int_{(-\pi,\pi)} f(P(r,\varphi))\, d\varphi \right) dr.$$

(iii) Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$P_3 : (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R} \quad \text{bijektiv.}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \Theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\Theta \\ r\sin\varphi\cos\Theta \\ r\sin\Theta \end{pmatrix}$$



$$\det DP_3\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \Theta \end{pmatrix} = r^2\cos\Theta > 0.$$

Für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrierbar gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{(0,\infty)}\int_{(-\pi,\pi)}\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} f(P_3(r,\varphi,\Theta))\cdot r^2\cdot\cos\Theta \, d\Theta\, d\varphi\, dr.$$

(iv) Sei $f = \chi_{B_{\mathbb{R}^3}(0,R)}$ (Kugelvolumen)

$$\begin{aligned} v(B_{\mathbb{R}^3}(0,R)) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z) \\ &= \int_{(0,R)}\int_{(-\pi,\pi)}\int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} r^2\cos\Theta \, d\Theta\, d\varphi\, dr \\ &= \int_{(0,R)} r^2\, dr \cdot \int_{-\pi,\pi} 1\cdot d\Theta \cdot \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \cos\Theta\, d\Theta \\ &= \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4\pi}{3}R^3. \end{aligned}$$

8.66 Cor. (Integration rotationssymmetrischer Funktionen):

Sei $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche sich in der Form $g(x) = f(\|x\|_2)$ schreiben lässt für eine Funktion $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (d.h. g ist rotationssymmetrisch). Dann ist g über $\mathbb{R}^n$ integrierbar genau dann, wenn $f(r)\cdot r^{n-1}$ über $(0,\infty)$ integrierbar ist; in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = n\cdot v(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))\cdot \int_{(0,\infty)} f(r)\, r^{n-1}\,dr.$$

Bew. (für $n=3$): Es ist $g(P(r,\varphi,\theta)) = f(\|P(r,\varphi,\theta)\|) = f(r)$, also gilt nach Transformationssatz

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x)\,dx = \int g(P(r,\varphi,\theta))\, r^2 \cos\theta \,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_{(0,\infty)} f(r)\, r^2\,dr \cdot \int_{(-\pi,\pi)} 1\cdot d\varphi \cdot \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \cos\theta\,d\theta$$

$$= 3\cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \int_{(0,\infty)} f(r)\, r^2\,dr. \qquad \square$$