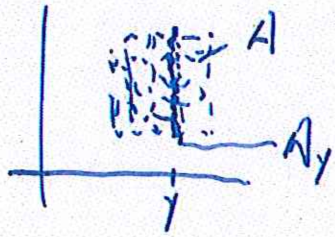
„Die Mathematik ist doch die angenehmste Wissenschaft; sie und die Astronomie vertreten bei mir Tanzgesellschaften, Konzerte und andere derartige Belustigungen, die ich nur dem Namen nach kennen."
Friedrich Wilhelm Bessel, 18

5. Der Satz von Fubini

5.1 Lemma: Sei $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ eine Nullmenge. Dann existiert eine Nullmenge $B \subset \mathbb{R}^q$ so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^q \setminus B$ die Menge $A_y := \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x,y) \in A\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^p$ ist.



Bew.: A ist Nullmenge, d.h. $\|\chi_A\|_1 = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppe $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\mathbb{R}_+}{c_k} \cdot \chi_{\underset{\text{offene Quader in } \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}{Q_k}}$

über χ_A mit $I(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k) < \varepsilon$,

und mit $\chi_A(x,y) \le \Phi(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Es ist $Q_k = Q_k' \times Q_k''$, wo $Q_k' \subset \mathbb{R}^p$, $Q_k'' \subset \mathbb{R}^q$ offene Quader sind.

Definiere $a: \mathbb{R}^q \to [-\infty, \infty]$ durch

$$a(y) := \|\chi_{A_y}\|_{1,\mathbb{R}^p}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^p$ gilt $\chi_{A_y}(x) = \chi_A(x,y) \le \Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k'}(x) \cdot \chi_{Q_k''}(y)$,

also $\chi_{A_y} \le \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k''}(y) \cdot \chi_{Q_k'}$ und nach 4.9

$$a(y) = \|\chi_{A_y}\|_{1,\mathbb{R}^p} \overset{4.9}{\le} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k''}(y) \cdot \|\chi_{Q_k'}\|_{1,\mathbb{R}^p} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k') \cdot \chi_{Q_k''}(y),$$

d.h. $a \le \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k') \cdot \chi_{Q_k''} =: \Psi$ und Ψ ist Treppe über a.

Aber $\|a\|_{1,\mathbb{R}^q} \le I(\Psi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k') \cdot v(Q_k'') = I(\Phi) < \varepsilon$,

also gilt $\|a\|_{1,\mathbb{R}^q} = 0$.

Für $l \in \mathbb{N}$ setze

$$B_l := \{ y \in \mathbb{R}^q \mid a(y) \geq \frac{1}{l+1} \},$$

dann ist $B_l \subset \mathbb{R}^q$ eine Nullmenge, denn

$$\|\chi_{B_l}\|_{1,\mathbb{R}^q} \le (l+1) \cdot \|a\|_{1,\mathbb{R}^q} = 0.$$

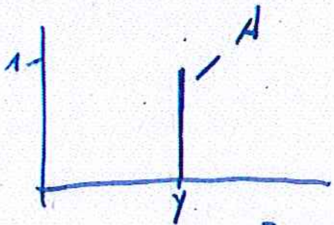
$\overset{3.7}{\Rightarrow}$ $B := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l \subset \mathbb{R}^q$ ist Nullmenge,

aber $B = \{ y \in \mathbb{R}^q \mid a(y) \neq 0 \}$.

D. h. für $y \in \mathbb{R}^q \setminus B$ gilt $0 = a(y) = \|\chi_{A_y}\|_{1,\mathbb{R}^p}$

und $A_y \subset \mathbb{R}^p$ ist Nullmenge. □

5.2 Bem.: In 5.1 ist es wesentlich, die Nullmenge B auszuschließen:



$A_y = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ist keine Nullmenge

1.53 __Satz__ (Fubini): Sei $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to (-\infty, \infty]$ integrierbar.

a) Die Funktion $f_y : \mathbb{R}^p \to (-\infty, \infty]$, $f_y(x) := f(x, y)$, ist für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ integrierbar, d. h. f_y ist integrierbar für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$, wo $N \subset \mathbb{R}^q$ eine Nullmenge ist.

b) Definiere $F : \mathbb{R}^q \to (-\infty, \infty]$ durch

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^p} f_y \, dx, & y \in \mathbb{R}^q \setminus N \\ 0, & y \in N. \end{cases}$$

Dann ist F integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^q} F(y) \, dy.$$

Wir schreiben auch

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Bew.: a) Nach Cor. 4.4 existieren $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$ und eine Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ mit

$$\|f-\varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty}$$

und

(i) $\varphi_k(x,y) \xrightarrow{k\to\infty} f(x,y)$ für $(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\setminus A$.

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1}-\varphi_k\|_1 < \infty$.

Nach Lemma 5.1 existiert eine Nullmenge $N'\subset\mathbb{R}^q$ so dass für $y\in\mathbb{R}^q\setminus N'$

$$A_y = \{x\in\mathbb{R}^p \mid (x,y)\in A\} \subset \mathbb{R}^p$$

eine Nullmenge ist.

Aber für $x\in\mathbb{R}^p\setminus A_y$ gilt $(x,y)\notin A$, also folgt:

(iii) Für $y\in\mathbb{R}^q\setminus N'$ gilt

$$\underbrace{(\varphi_k)_y}_{(x\mapsto\varphi_k(x,y))} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{f_y}_{(x\mapsto f(x,y))}$$ punktweise fast überall, d.h. für $x\in\mathbb{R}^p\setminus A_y$.

Setze

$$H_k(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \underbrace{|\varphi_{k+1}(x,y)-\varphi_k(x,y)|}_{\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)}\,dx = \|(\varphi_{k+1})_y-(\varphi_k)_y\|_{1,\mathbb{R}^p}.$$

Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen gilt

$$\int_{\mathbb{R}^q} H_k(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} |\varphi_{k+1}-\varphi_k|\,d(x,y) = \|\varphi_{k+1}-\varphi_k\|_{1,\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q},$$

und nach (ii)

$$(A) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^q} H_k(y)\,dy < \infty .$$

Dann ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^{i} H_k\right)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Folge $\left(\int\left(\sum_{k=0}^{i} H_k\right)dy\right)_{i\in\mathbb{N}}$ ist wegen (A) beschränkt. Nach Beppo Levi ist dann $H := \sum_{k=0}^{\infty} H_k : \mathbb{R}^q \to [-\infty,\infty]$ integrierbar und nach 3.8 ist H außerhalb einer Nullmenge $N'' \subset \mathbb{R}^q$ endlich; wir erhalten

$$(iv) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \|(\varphi_{k+1})_y - (\varphi_k)_y\|_{1,\mathbb{R}^p} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(y) = H(y) < \infty \text{ für } y \in \mathbb{R}^q\setminus N''.$$

Setze $N := N' \cup N''$.

Für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$ gilt nach (iv):

$((\varphi_k)_y)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{1,\mathbb{R}^p}$,

konvergiert also nach 4.3 in $L^1(\mathbb{R}^p)$

gegen ein $[g] \in L^1(\mathbb{R}^p)$ (für ein $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$).

Es existiert eine Teilfolge $((\varphi_{k_\nu})_y)_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit

$(\varphi_{k_\nu})_y \xrightarrow{\nu\to\infty} g$ punktweise fast überall.

Wegen (iii) gilt $g = f_y$ fast überall, also ist f_y integrierbar für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$.

b) Nach Satz 43 gilt außerdem für $y \in \mathbb{R}^q \setminus N$

(**) $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_k(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx.$

Wir setzen $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_k(x,y)\,dx$, $k \in \mathbb{N}$,
dann ist $\Phi_k \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^q)$ (vgl. Fubini für Treppenfunktionen)
und es gilt

(v) $\Phi_k \to F$ punktweise auf $\mathbb{R}^q \setminus N$ (nach (**))

(vi) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \| \Phi_{k+1} - \Phi_k \|_{1,\mathbb{R}^q} \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_{1,\mathbb{R}^q} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{1,\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} \overset{(ii)}{<} \infty.$

Wegen (vi) ist $(\Phi_k)_k$ Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_{1,\mathbb{R}^q}$, also konvergiert nach 43 eine Teilfolge $(\Phi_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ punktweise fast überall gegen ein $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$. Wegen (v) gilt $F = G$ fast überall und F ist integrierbar. Wieder nach 43 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^q} F(y)\,dy \overset{40.3}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \Phi_k(y)\,dy$$

$$\underset{\text{Fubini für Treppenfunktionen}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} \varphi_k(x,y)\,d(x,y)$$

$$\underset{\text{Wahl der } \varphi_k}{\overset{42.2}{=}} \int f(x,y)\,d(x,y).$$

□

[redacted]5.4 <u>Satz</u> (Tonelli): Sei $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.
f ist genau dann integrierbar, wenn wenigstens eines der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\,dx\right)dy \quad (*), \qquad \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dy\right)dx \quad (**)$$

existiert. In diesem Fall gilt die Formel aus [redacted]5.3.

Bew.: "$\Rightarrow$": f integrierbar $\overset{2[redacted]3b)}{\Longrightarrow}$ $|f|$ integrierbar, Existenz der Integrale folgt nun aus 5[redacted]3.

"$\Leftarrow$": Nach Cor. [redacted]4.15 genügt es zu zeigen, dass $|f|$ integrierbar ist.

Sei $W_k := [-k, k]^n$ und $f_k := \min\{|f|, k \cdot \chi_{W_k}\}$,
dann ist f_k integrierbar und $f_k \to |f|$ punktweise mon. wachsend.
Außerdem gilt

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f_k(x,y)\,d(x,y) \overset{5[redacted]3}{=} \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f_k(x,y)\,dx\right)dy \le \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}|f(x,y)|\,dx\right)dy < \infty$$

da $(*)$ existiert

$\overset{\text{Beppo Levi}}{\Longrightarrow}$ $|f|$ ist integrierbar. □

[redacted]5.5 z.B.: $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ ist nicht integrierbar über $[0,1]\times[0,1]$, und

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,dx\right)dy \neq \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,dy\right)dx .$$

Bew.: Übung. □

Exkurs: Die Gammafunktion

5.6 Prop./Def.: Für $x > 0$ ist $(t \mapsto t^{x-1} e^{-t})$ integrierbar über $(0,\infty)$.

Wir setzen $\Gamma(x) := \int_{(0,\infty)} t^{x-1} e^{-t} \, dt$.

Bew.: 1. $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq \underbrace{t^{x-1}}_{\text{integrierbar über } [0,1]}$, denn

$$\int_{[0,1]} t^s \, dt \overset{\text{Beppo Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} \chi_{[\frac{1}{k+1},1]}(t) \cdot t^s \, dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{1} t^s \, dt = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{s+1} \cdot t^{s+1} \Big|_{\frac{1}{k+1}}^{1} \right) = \frac{1}{s+1}$$

für $s > -1$.

2. $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\text{integrierbar über } [t_0,\infty)}$ falls $t \geq t_0$ für ein geeignetes t_0 (denn $t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$)

(warum?)

3. $t^{x-1} e^{-t}$ ist integrierbar über $[1, t_0]$ (stetige Fkt. auf kpt. Intervall).

$\square$

5.7 Prop.: Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Weiter gilt $\Gamma(1) = 1$, also $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Bew.: 1. $\Gamma(x+1) = \int_{(0,\infty)} t^{x+1-1} e^{-t}\, dt \overset{\text{Beppo Levi:}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{k} t^{x} e^{-t}\, dt$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(-t^{x} e^{-t} \Big|_{\frac{1}{k+1}}^{k} + \int_{\frac{1}{k+1}}^{k} x \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \right)$$

$$= x \cdot \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{k} t^{x-1} e^{-t}\, dt = x \cdot \Gamma(x).$$

2. $\Gamma(1) = \int_{(0,\infty)} e^{-t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{k} e^{-t}\, dt = \lim_{k\to\infty} e^{-t} \Big|_{\frac{1}{k+1}}^{k} = 1 - 0 = 1.$

3. $\Gamma(n+1) = n!$ nach Induktion. $\square$

51.8 **Satz:** Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Bew.: Es ist $e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}}_{\text{monoton wachsend in } n}$ für $t > 0$ (Ana I).

Setze $f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n}, & 0 < t \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$,

dann gilt für jedes $t \in (0,\infty)$ $f_n(t) \to t^{x-1} e^{-t}$ monoton wachsend.

Wir erhalten für $x > 0$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(x) \\
&= \int_{(0,\infty)} t^{x-1} e^{-t}\, dt \\
&\overset{\text{Beppo Levi}}{\underset{n\to\infty}{\uparrow}} \int_{(0,\infty)} f_n(t)\, dt \\
&\overset{\text{Beppo Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{n} \underbrace{t^{x-1}}_{u'} \underbrace{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}_{v} dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \Bigg|_{\frac{1}{k+1}}^{n} + \int_{\frac{1}{k+1}}^{n} \underbrace{\frac{t^x}{x}}_{u'} \underbrace{\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}}_{v} dt \right) \\
&= 0 + \lim_{k\to\infty} \left(\frac{t^{x+1}}{x\cdot(x+1)} \cdot \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \Bigg|_{\frac{1}{k+1}}^{n} + \int_{\frac{1}{k+1}}^{n} \frac{t^{x+1}}{x\cdot(x+1)} \cdot \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} dt \right) \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{x(x+1)} \cdot \int_0^n t^{x+1} \cdot \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} dt \\
&= \vdots \\
&= \underbrace{\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 1}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}}_{(n-1)\text{-mal}} \cdot \frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot \ldots \cdot(x+n-1)} \cdot \underbrace{\int_0^n t^{x+n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^0 dt}_{= \frac{t^{x+n}}{x+n}\Big|_0^n = \frac{n^{x+n}}{x+n}} \\
&= \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n)}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

54.9 Cor.: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Bew.: $$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n+\frac{1}{2})} \cdot \frac{n!\cdot n^{\frac{1}{2}}}{(1-\frac{1}{2})\cdot(2-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(n!)^2\cdot n}{(n+\frac{1}{2})\,(1^2-\frac{1}{4})\cdot(2^2-\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(n^2-\frac{1}{4})}$$

$$= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}\right) = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}}_{=:c_n}.$$

Setze $A_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t\, dt$, dann gilt

$A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$ und $A_m \underset{\text{part. Integration}}{=} \frac{m-1}{m} A_{m-2}$, $m \geq 2$.

Es folgt mit Induktion

$$A_{2n} = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$A_{2n+1} = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot4\cdot2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot5\cdot3}\cdot 1.$$

Es gilt $\sin^{2n+2} t \leq \sin^{2n+1} t \leq \sin^{2n} t$ für $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$,

also $A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}$.

Weiter gilt $\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$; wir erhalten

$$1 \xleftarrow{\infty \leftarrow n} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \leq \underbrace{\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}}_{=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)\cdot\frac{2}{\pi}} \leq \frac{A_{2n}}{A_{2n}} = 1$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)\cdot\frac{2}{\pi} = c_n\cdot\frac{2}{\pi}\xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow 2\cdot c_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi.$$ □

Exkurs Ende.

5.10 z.B.: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,dx = \pi^{\frac{n}{2}}$; insbesondere

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi} \quad (\text{Gaußintegral}).$$

Bew.: $$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt \underset{(\text{warum?})}{=} 2\cdot\int_{(0,\infty)} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \int_{(0,\infty)} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,du = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t^2, \\ \frac{du}{dt} = 2t,\quad dt = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{2}\,du \end{array}\right]$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,dx = \int e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)}\,d(x_1,\dots,x_n)$$

Fubini: Integrierbarkeit: Wende wiederholt Tonelli an

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)}\,dx_1\right) d(x_2,\dots,x_n)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,dx_1\right)\cdot e^{-(x_2^2+\dots+x_n^2)}\,d(x_2,\dots,x_n)$$

$$= \dots = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}. \qquad \square$$

5.11 z.B.: Für das Kugelvolumen im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$v\left(B_{\mathbb{R}^n}(0,R)\right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\cdot R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Bew.: Übung (vgl. Beispiel 3.4). $\square$

57.12 <u>z.B.</u>: Wir definieren die Eulersche Betafunktion

$$B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}_+$$

durch

$$B(x,y) := \int_{(0,1)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_{(0,\infty)} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$$

(Warum existiert das Integral?) $\left[\text{Substitution } t=\frac{1}{1+u}\right]$

<u>Bsp.</u>: Es gilt $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Bew.: $$\Gamma(z) = \int_{(0,\infty)} t^{z-1} e^{-t}\,dt = \int_{(0,\infty)} (R\cdot s)^{z-1} e^{-R\cdot s}\cdot R\,ds$$

$$\left[\begin{array}{l} t = R\cdot s, \\ \frac{dt}{ds} = R \end{array}\right]$$

$$= R^{z} \int_{(0,\infty)} s^{z-1} e^{-Rt}\,ds$$

$$\xrightarrow{z=x+y,\ R=1+u} \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_{(0,\infty)} t^{x+y-1} e^{-(1+u)t}\,dt = \frac{1}{(1+u)^{x+y}}$$

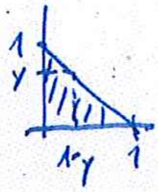
$$\rightsquigarrow B(x,y) = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} u^{x-1} t^{x+y-1} e^{-(1+u)t}\,dt \right) du$$

[Integrierbarkeit folgt mit Tonelli, da die rechte Seite endlich ist]

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_{(0,\infty)} t^{x+y-1} e^{-t} \underbrace{\left(\int_{(0,\infty)} u^{x-1} e^{-ut}\,du \right)}_{=\Gamma(x)\cdot t^{-x}} dt$$

$$= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \cdot \int_{(0,\infty)} t^{y-1} e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \qquad \square$$

5.13 z.B. (Dirichlet): Sei $\Delta := \{(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \mid x+y<1\}$ und $f: \Delta \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch



$$f(x,y) := x^{p-1} y^{q-1}.$$

$$\int_\Delta f(x,y)\, d(x,y) = \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1-y)} x^{p-1} y^{q-1}\, dx \right) dy$$

$$= \int_{(0,1)} y^{q-1} \left(\int_{(0,1-y)} x^{p-1}\, dx \right) dy$$

$$= \int_{(0,1)} y^{q-1} \cdot \frac{1}{p} \cdot (1-y)^p\, dy$$

$$= \frac{1}{p} \cdot B(q, p+1)$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{\Gamma(q) \cdot \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$