4. $L^1(\mathbb{R}^n)$. Konvergenzsätze

"You need to develop a personal conviction that you are a mathematician, and that what you are doing makes sense." Katarzyna Rejzner

4.1 Prop.: Definiere $\mathcal{N} := \{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_1 = 0 \}$.

Dann ist $\mathcal{N}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Bew.: $\|\alpha \cdot f + \beta \cdot g\|_1 \leq |\alpha| \cdot \|f\|_1 + |\beta| \cdot \|g\|_1$. $\square$

4.2 Def.: Wir definieren $L^1(\mathbb{R}^n)$ als den Quotientenraum

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N},$$

versehen mit der Norm $\underbrace{\|f + \mathcal{N}\|_1}_{\text{Norm auf } L^1} := \underbrace{\|f\|_1}_{\text{Halbnorm auf } \mathcal{L}^1}$. (Warum ist dies eine Norm?)

Falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so schreiben wir auch $[f]$ oder kurz f

$f = f + \mathcal{N} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

4.3 Satz (Riesz-Fischer): $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig.

Ist $([f_k])_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchy Folge mit Limes $[f]$, so existiert eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_{k_\nu} \xrightarrow{\nu \to \infty} f$ punktweise fast überall. Weiter gilt

(*) $\lim\limits_{k \to \infty} \int f_k \, dx = \int f \, dx$.

Bew.: Sei $([f_k])_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ Cauchy, d. h.

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

(**) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,n \geq N : \underbrace{\|(f_n + \mathcal{N}) - (f_m + \mathcal{N})\|_1}_{\|f_n - f_m\|_1} < \varepsilon.$

Wähle nun Indizes $k_0 < k_1 < \dots$ mit

$$\|f_k - f_{k_\nu}\|_1 \leq 2^{-(\nu+1)} \quad \text{falls } k \geq k_\nu.$$

Es gilt dann $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}\|_1 \leq 1$.

Setze $g_\nu := f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}$, $g := \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu|$,

dann sind $g_\nu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$;

es gilt $\|g\|_1 \overset{18.9}{\leq} 1$.

Nach Prop. 3.8 ist g fast überall endlich, d.h.

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = \infty\}$$

ist eine Nullmenge.

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)$ konvergiert absolut für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$.

Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} f_{k_0}(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_{k_\nu}(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt (Konvergenzsatz) $f_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} f$ punktweise fast überall (außer auf N).

Noch zu zeigen: f ist integrierbar, und $\|f-f_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, und (A).

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\mu \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} \|g_\nu\|_1 < \varepsilon, \quad \|f_k - f_{k_\mu}\|_1 \leq \varepsilon \text{ für } k \geq k_\mu.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f_{k_\mu} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f-\varphi\|_1 &\leq \|f-f_{k_\mu}\|_1 + \|f_{k_\mu}-\varphi\|_1 \\ &\leq \Big\|\sum_{\nu=\mu}^{\infty} g_\nu\Big\|_1 + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist integrierbar.

Für $k \geq k_\mu$ erhalten wir

$$\|f-f_k\|_1 \leq \|f-f_{k_\mu}\|_1 + \|f_{k_\mu} - f_k\|_1 \leq 2\varepsilon.$$

$\Rightarrow \|f-f_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$

Weiter gilt $\left|\int f\,dx - \int f_k\,dx\right| \leq \int |f-f_k|\,dx = \|f-f_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, also $\int f_k\,dx \xrightarrow{k\to\infty} \int f\,dx$. $\square$

44.4 <u>Cor.</u>: Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann existiert eine Folge

$(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}^n}$ mit

(i) $\|f - \varphi_\nu\|_1 \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$

(ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu\|_1 < \infty$

(iii) $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} f$ fast überall.

Bew.: Sei $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}^n}$ eine Folge mit $\|f - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$,

dann gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \|\psi_n - \psi_m\|_1 < \varepsilon$ (vgl. (11) in 6.3).

Nach dem Beweis von 44.3 existiert eine Teilfolge

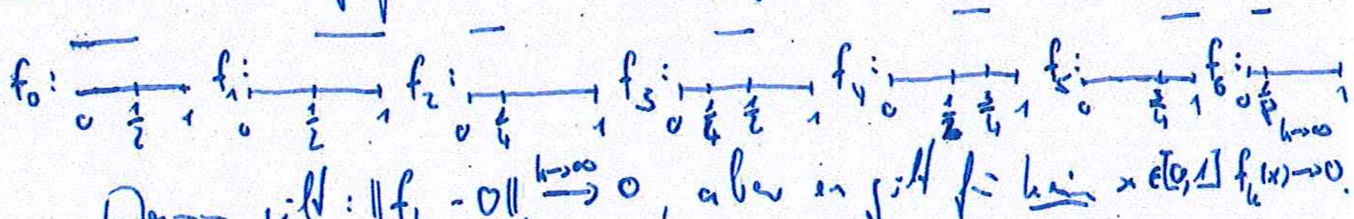
$(\psi_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|\psi_{k_{\nu+1}} - \psi_{k_\nu}\|_1 \leq 1$ und so dass

$\psi_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} \tilde{f}$ fast überall für ein $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Aber dann ist $f = \tilde{f}$ fast überall, also gilt auch

$\psi_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} f$ fast überall. □

40.5 <u>Bem.</u>: Der Übergang zu einer Teilfolge in 40.3 ist wesentlich:



Dann gilt: $\|f_k - 0\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, aber es gilt für <u>kein</u> $x \in [0,1]$ $f_k(x) \to 0$.

Wie sieht eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ aus mit $f_{k_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$ fast überall?

4.6 **Satz** (Beppo Levi): Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen $:\mathbb{R}^n\to(-\infty,\infty]$ so dass $(\int f_k\,dx)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Sei $f:\mathbb{R}^n\to(-\infty,\infty]$ der punktweise Limes, d.h.

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f\,dx = \lim_{k\to\infty}\int f_k\,dx.$$

Beweis: Die Folge $(\int f_k\,dx)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent.

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, N\in\mathbb{N}:\forall\, m,k\geq N: \left|\int f_m\,dx-\int f_k\,dx\right|<\varepsilon.$$

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton $\Rightarrow$ $\|f_m-f_k\|_1=\int|f_m-f_k|\,dx$

$$\overset{\text{o.E. } m\geq k}{=}\left|\int f_m\,dx-\int f_k\,dx\right|$$

$$<\varepsilon \text{ falls } m\geq k\geq N.$$

$\Rightarrow (f_k+\mathcal{N})_{k\in\mathbb{N}}\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ ist Cauchy.

Sei $\tilde f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit

$$\|f_k-\tilde f\|_1\xrightarrow{k\to\infty}0$$

($\tilde f$ existiert nach Satz 4.3).

Ebenfalls nach 14.3 gibt es eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ mit $f_{k_\nu} \xrightarrow{\nu \to \infty} \tilde{f}$ fast überall und

$$\lim_{\nu \to \infty} \int f_{k_\nu} \, dx = \int \tilde{f} \, dx .$$

$\Rightarrow$ $f = \tilde{f}$ fast überall und

$$\int f \, dx = \int \tilde{f} \, dx = \lim_{\nu \to \infty} \int f_{k_\nu} \, dx = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, dx . \qquad \square$$

14.7 Cor.: a) Seien $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Dann ist $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ meßbar genau dann, wenn die Folge $(v(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist; in diesem Fall gilt

$$v\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sup_k v(A_k) .$$

b) Seien $B_0, B_1, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ meßbar ~~genau dann, wenn~~ so dass $B_i \cap B_j$ Nullmengen sind für $i \neq j$. Dann ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ meßbar genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} v(B_k) < \infty$ ist; in diesem Fall gilt

$$v\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} v(B_k) .$$

Bew.: a) Beppo Levi mit $f_k = \chi_{A_k}$, $f = \chi_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k} = \lim_k f_k$ (monoton).

b) folgt aus a) mit $A_k := \bigcup_{i=0}^{k} B_i$ und $v(A_k) = \sum_{i=0}^{k} v(B_i)$. $\square$

40.8 Bem.: Setze $\Lambda := \{E \mid E \subset \mathbb{R}^n \text{ meßbar}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$;
die Abbildung $v : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ heißt auch Lebesgue-Maß
und es gilt:

(M0) Λ enthält alle kompakten und ~~offenen~~ beschränkten offenen Mengen.

(M1) ~~$v(A)$~~ $A, B \in \Lambda$, $A \subset B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$.

(M2) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $E \in \Lambda$ ist $a + E \in \Lambda$ und es gilt $v(a+E) = v(E)$. (Translationsinvarianz)

(M3) Für $A_0, A_1, \ldots \subset \Lambda$ paarweise disjunkt mit $\sum_{k=0}^{\infty} v(A_k) < \infty$ ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Lambda$ und es gilt

$$v\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} v(A_k). \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

(M4) $v(\emptyset) = 0$, $v([0,1]^n) = 1$.

Man kann zeigen: Das Lebesgue-Maß ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

40.9 Satz (von Lebesgue über majorisierte Konvergenz):
Sei $f_k : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer Funktionen, sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine weitere Funktion, und es gelte $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ punktweise fast überall.
Sei $F : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ integrierbar mit $|f_k| \leq F$, $k \in \mathbb{N}$.
Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,dx.$$

Beweis 17: Mittels Prop. 3.8 dürfen wir annehmen, dass f_k, f, F nur Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. (Warum?)

Wir dürfen außerdem $f_k \to f$ punktweise überall annehmen.

Setze
$$g_{k,\nu} := \max\{f_k, \dots, f_{k+\nu}\},$$
$$g_k := \sup_{i \geq k} f_i, \quad k, \nu \in \mathbb{N},$$

dann sind $g_{k,\nu}, g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen mit

$g_{k,\nu} \xrightarrow{\nu \to \infty} g_k$ punktweise und monoton wachsend;

die $g_{k,\nu}$ sind integrierbar und $\int g_{k,\nu}\, dx \leq \int F\, dx$

Beppo Levi $\Longrightarrow$ g_k ist integrierbar und es gilt
$$\int g_k\, dx = \lim_{\nu \to \infty} \int g_{k,\nu}\, dx.$$

Weiter haben wir $\left|\int g_{k,\nu}\, dx\right| \leq \int F\, dx$, also auch $\left|\int g_k\, dx\right| \leq \int F\, dx$, $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt außerdem $g_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ punktweise und monoton fallend, d.h. $-g_k \to -f$ punktweise und monoton wachsend.

Da $\int -g_k\, dx \leq \left|\int g_k\, dx\right| \leq \left|\int F\, dx\right| < \infty$ gilt, ist $\left(\int -g_k\, dx\right)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt und wieder nach Beppo Levi ist $-f$ integrierbar mit $\lim_k \int -g_k\, dx = \int -f\, dx$, also

(*) $$\int f\, dx = \lim_k \int g_k\, dx.$$

Definieren nun $h_{k,\nu} := \min\{f_k, \dots, f_{k+\nu}\}$ und $h_k := \inf_{i \geq k} f_i$, $k, \nu \in \mathbb{N}$.
(Dann gilt $h_{k,\nu} \to h_k$ punktweise und monoton fallend, und $h_k \to f$ punktweise und monoton wachsend.)

Wie oben zeigt man

$$(**) \quad \int f \, dx = \lim_{k\to\infty} \int h_k \, dx .$$

Wegen $h_k \leq f_k \leq g_k$ erhalten wir

$$\int f \, dx = \lim_{k\to\infty} \int h_k \, dx \leq \lim_{k\to\infty} \int f_k \, dx \leq \lim_{k\to\infty} \int g_k \, dx = \int f \, dx . \qquad \square$$

4.10 Cor.: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f_k : A \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge integrierbarer Funktionen. Falls $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen $f : A \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist auch f integrierbar und es gilt

$$\int f_k \, dx \xrightarrow{k\to\infty} \int f \, dx . \qquad \square$$

4.11 Cor.: Sei $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung f'.
Dann ist f' über $[a, x]$ Lebesgue integrierbar und es gilt

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(t) \, dt .$$

Beweis: f ist differenzierbar, also stetig.

Definiere $f_k : [a,x] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t+\frac{1}{k+1}) - f(t)}{\frac{1}{k+1}}, & t \in [a, x-\frac{1}{k+1}] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: auf $[a,x)$ konvergiert f_k punktweise gegen f'.

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt:

Nach MWS existiert $s \in (t, t+\frac{1}{k+1})$ mit

$$\frac{f(t+\frac{1}{k+1}) - f(t)}{\frac{1}{k+1}} = f'(s),$$

also gilt

$$|f_k(t)| \leq \underbrace{\sup\{|f'(s)| \mid s \in [a,x]\}}_{\text{(hängt nicht von } k \text{ und } t \text{ ab)}} \overset{\text{n.V.}}{<} \infty.$$

Weiter ist f_k stetig auf $[a, x-\frac{1}{k+1}]$ und konstant 0 auf $(x-\frac{1}{k+1}, x]$, also Regelfunktion (warum?); es gilt

$$\int_a^x f_k(t)\,dt = \frac{1}{\frac{1}{k+1}} \cdot \left(\int_{x-\frac{1}{k+1}}^{x} f(t)\,dt - \int_a^{a+\frac{1}{k+1}} f(t)\,dt \right).$$

MWS d. Integralrechnung (Ana I, Satz 13.13)

$\Rightarrow \exists\, \tilde{t} \in [x-\frac{1}{k+1}, x]$ mit $f(\tilde{t}) \cdot \frac{1}{k+1} = \int^x f(t)\,dt$, entsprechend f. $[a, a+\frac{1}{k+1}]$

$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \int_a^x f_k(t)\,dt = \frac{1}{\frac{1}{k+1}} \cdot \left(\int \ldots - \int^{x-\frac{1}{k+1}} \ldots \right) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) - f(a).$

$\overset{\text{Cor. 4.10}}{\Longrightarrow}$ f' ist Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$f(x) - f(a) = \lim_{k\to\infty} \int_a^x f_k(t)\,dt = \int_{[a,x]} f'\,dt.$$

□

64.12 Def.: $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt σ-kompakt, falls A abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist.

64.13 z.B.: • offene Mengen
• abgeschlossene Mengen
• endliche Durchschnitte σ-kompakter Mengen
• abzählbare Vereinigungen σ-kompakter Mengen

sind σ-kompakt.

64.14 Def.: $A \subset \mathbb{R}^n$ σ-kompakt. Dann heißt $f: A \to [-\infty, \infty]$ lokal integrierbar, falls für jedes kompakte $K \subset A$ die Funktion $f|_K$ integrierbar ist.

64.15 Cor. (Majorantenkriterium): Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ σ-kompakt und $f: A \to [-\infty, \infty]$ lokal integrierbar.
Sei $F: A \to [-\infty, \infty]$ integrierbar mit $|f| \leq F$.
Dann ist f über A integrierbar.

Bew.: Sei $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit A_k kompakt, $k \in \mathbb{N}$.
Dann ist $f|_{A_k}$ integrierbar, also auch $f_k := f \cdot \chi_{A_k}$.
Es gilt aber $f_k \to f$ punktweise und $|f_k| \leq F$.
Satz 48.9 $\Rightarrow$ f ist integrierbar. □