2. Das Lebesgue Integral

„Vielen Mathematikern wurde ich der Mann mit den Funktionen ohne Ableitungen."
Henri Lebesgue

2.1 Def.: $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ heißt (Lebesgue) integrierbar, falls eine Folge $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ existiert mit

$$\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Wir setzen

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x)\,dx\,;$$

wir schreiben auch $\int f\,dx$.

2.2 Bem.: 1. Der Limes in $(*)$ existiert, denn $\left(\int \varphi_k\,dx\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist eine Cauchyfolge:

$$\begin{aligned} \left|\int \varphi_k\,dx - \int \varphi_l\,dx\right| &\le \int |\varphi_k - \varphi_l|\,dx \\ &= \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 \\ &\le \|\varphi_k - f\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1 < \varepsilon \text{ falls } k,l \text{ groß genug.} \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man, dass der Limes in $(*)$ nicht von der Wahl der Approximationsfolge $(\varphi_k)_k$ abhängt, d.h. für eine weitere Folge $(\psi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f - \psi_k\|_1 \to 0$ gilt $\lim_k \int \varphi_k\,dx = \lim_k \int \psi_k\,dx$.

2. $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, dann ist φ integrierbar im Sinne von 2.1 und das Integral stimmt mit dem aus Def. 1.1 überein.

21.3 Prop.: Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

a) $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ ist integrierbar; es gilt

$$\int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)\,dx = \alpha \cdot \int f\,dx + \beta \cdot \int g\,dx.$$

Insbesondere ist

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f$ ist Lebesgue integrierbar$\}$

ein VR über $\mathbb{R}$ und $\int : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist linear.

b) $|f|$ ist integrierbar und es gilt

$$\left| \int f\,dx \right| \leq \int |f|\,dx = \|f\|_1.$$

c) $f \leq g \Rightarrow \int f\,dx \leq \int g\,dx$

d) g beschränkt $\Rightarrow f \cdot g$ ist integrierbar.

Bew.: a) Seien $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}, (\psi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ Folgen mit

$$\|f - \varphi_k\|_1, \ \|g - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Dann ist $(\alpha \cdot \varphi_k + \beta \cdot \psi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ und

$$\|(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) - (\alpha \cdot \varphi_k + \beta \cdot \psi_k)\|_1$$

$$\overset{11.8}{\leq} |\alpha| \cdot \|f - \varphi_k\|_1 + |\beta| \, \|g - \psi_k\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

b), c), d): Übung. Für b) Benutze $\big||f| - |\varphi_k|\big| \leq |f - \varphi_k|$, also

$$\big\| |f| - |\varphi_k| \big\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 \quad \text{sowie}$$

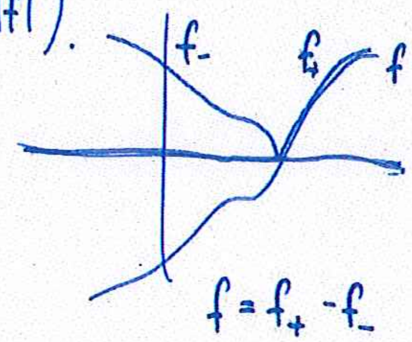
$$\|f\|_1 - \|f - \varphi_k\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1. \qquad \square$$

2[illegible].4 Bem.: Falls f integrierbar ist, so auch

$$f_+ := \max\{f, 0\} = \frac{1}{2}(f + |f|)$$

und

$$f_- := \max\{-f, 0\} = \frac{1}{2}(-f + |f|).$$



Entsprechend für

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

2[illegible].5 Def.: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung.
Wir sagen f ist integrierbar über A, falls

$f_A : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, definiert durch $f_A(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$,

integrierbar ist.
Wir schreiben

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)\,dx,$$

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1,$$

$$\mathcal{L}^1(A) := \{f : A \to \mathbb{R} \mid f_A \text{ ist integrierbar}\}.$$

Prop. 2[illegible].3 und Bem. 2[illegible].4 gelten entsprechend.

2.6 Prop.: Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist f Lebesgue integrierbar und die Integrale aus 2.1 und Ana I stimmen überein.

Bew.: Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T([a,b])$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f-\varphi_k\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|f-\varphi_k\|_{1,[a,b]} &= \|(f-\varphi_k)_{[a,b]}\|_1 \\
&= \| |(f-\varphi_k)_{[a,b]}| \cdot \chi_{[a,b]} \|_1 \\
&\leq \| \|f-\varphi_k\|_{\infty,[a,b]} \chi_{[a,b]} \|_1 \\
&= \|f-\varphi_k\|_{\infty,[a,b]} \cdot \|\chi_{[a,b]}\|_1 \\
&= \|f-\varphi_k\|_{\infty,[a,b]} \cdot (b-a) \xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

also ist f Lebesgue integrierbar und

$$\int_{[a,b]} f\,dx \overset{2.5}{=} \int_{\mathbb{R}} f_{[a,b]}\,dx \overset{2.1}{=} \lim_k \int_{\mathbb{R}} (\varphi_k)_{[a,b]}\,dx \overset{1.1,\,\text{Ana I}}{=} \lim_k \int_a^b \varphi_k\,dx \overset{\text{Ana I}}{=} \int_a^b f\,dx. \quad \square$$

12.7 Satz (Translationsinvarianz): Sei $f: \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ integrierbar und $a \in \mathbb{R}^n$.
Dann ist auch $f_a : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, definiert durch $f_a(x) := f(x-a)$, integrierbar und es gilt $\int f_a \, dx = \int f \, dx$.

Bew.: Für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist $a + Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x - a \in Q\}$ wieder ein Quader (warum?), und es gilt
$$\int \chi_Q \, dx = v(Q) = v(a+Q) = \int \chi_{a+Q} \, dx = \int (\chi_Q)_a \, dx.$$
Der Satz gilt daher für f von der Form χ_Q; wegen Linearität auch für $f \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ (denn $\alpha \cdot f_a + \beta \cdot g_a = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)_a$).

Ist nun $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung und
$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}$ eine Treppe über g, so ist
$\Phi_a = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (\chi_{Q_k})_a = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{a+Q_k}$ eine Treppe über g_a
und $I(\Phi) = I(\Phi_a)$. Es folgt $\|g\|_1 = \|g_a\|_1$.
Sei jetzt $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ eine Folge mit $\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0$.
Dann gilt auch $\|f_a - (\varphi_k)_a\|_1 = \|(f - \varphi_k)_a\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1 \to 0$,
also ist f_a integrierbar; es gilt
$\int f_a \, dx = \lim_k \int (\varphi_k)_a \, dx = \lim_k \int \varphi_k \, dx = \int f \, dx.$ $\square$

12.8 Satz (Beppo Levi mit Treppenfunktionen):

Sei $f: \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung und $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \tilde{J}_{\mathbb{R}^n}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit

(i) $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

(ii) $\varphi_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ punktweise

(iii) $\left(\int \varphi_k \, dx\right)_{\mathbb{N}}$ ist beschränkt (also konvergent, da monoton).

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f \, dx = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \, dx .$$

Bew.: Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - \varphi_m(x) &= \lim_{k \to \infty} \left(\varphi_k(x) - \varphi_m(x)\right) \\ &= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=m}^{k-1} \varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x) \\ &= \sum_{i=m}^{\infty} \varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x), \end{aligned}$$

also $f - \varphi_m = \sum_{i=m}^{\infty} \underbrace{\varphi_{i+1} - \varphi_i}_{\geq 0}$, also

$$\|f - \varphi_m\|_1 \overset{12.9}{\leq} \sum_{i=m}^{\infty} \|\underbrace{\varphi_{i+1} - \varphi_i}_{\in \tilde{J}_{\mathbb{R}^n}}\|_1 \overset{12.11}{=} \sum_{i=m}^{\infty} \left(\int |\varphi_{i+1} - \varphi_i| \, dx\right) = \sum_{i=m}^{\infty} \int (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \, dx$$

$$= \sum_{i=m}^{\infty} \left(\int \varphi_{i+1} \, dx - \int \varphi_i \, dx\right) = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \, dx - \int \varphi_m \, dx \xrightarrow{m \to \infty} 0. \ \square$$

2.1.9 **Prop.:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}_+$ stetig.

Dann existiert $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ mit

* $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$
* $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend
* $\varphi_k \xrightarrow{k \to \infty} f_U$ punktweise.

Bew.: Sei $Q_{x,t} \subset \mathbb{R}^n$ für $(x,t) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ definiert durch

$$Q_{x,t} := [x_1 - t, x_1 + t] \times \dots \times [x_n - t, x_n + t];$$

setze

$$Q'_{x,t} := \begin{cases} Q_{x,t}, & \text{falls } Q_{x,t} \subset U \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$c_{x,t} := \begin{cases} \min\{f(y) \mid y \in Q'_{x,t}\}, & \text{falls } Q'_{x,t} \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Warum existiert das Minimum?)

Dann gilt für $(x,t) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ $\quad c_{x,t} \cdot \chi_{Q'_{x,t}} \leq f$.

Außerdem gilt: Zu jedem $y \in U$ und $\varepsilon > 0$ existiert $(x,t) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ mit $|c_{x,t} \cdot \chi_{Q'_{x,t}}(y) - f(y)| < \varepsilon$ (warum?).

Wähle $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ surjektiv und definiere $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ durch $\varphi_k(y) := \max\{c_{\gamma(i)} \cdot \chi_{Q'_{\gamma(i)}}(y) \mid i = 0, \dots, k\}$, dann ist $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ wie gewünscht. (Warum?) $\square$

12.10 <u>Satz</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f: U \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f über U integrierbar.

Bew.: Wegen $f = f_+ - f_-$ und Prop. 12.3 genügt es zu zeigen, dass f_+ und f_- integrierbar sind; wir dürfen daher o. E. d. A. annehmen, dass $0 \leq f \leq M$ gilt für ein $M \in \mathbb{R}_+$.

Wähle $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ wie in Prop. 21.9.

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $U \subset Q$, dann ist

$$\int \varphi_k \, dx \leq \int M \cdot \chi_Q \, dx = M \cdot v(Q) < \infty,$$

also ist $\left(\int \varphi_k \, dx\right)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt und f ist integrierbar nach Satz 21.8. $\square$

21.11 <u>Satz</u> (Fubini für stetige Funktionen auf offenen Teilmengen): Sei $U \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ offen und beschränkt, $f: U \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Für $y \in \mathbb{R}^q$ definiere $f_y: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ durch $f_y(x) := f_U(x, y)$. Dann ist f_y integrierbar; die Abbildung $F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f_y(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^p} f_U(x,y) \, dx$ ist ebenfalls integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_U(x,y) \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f_U(x,y) \, dx \right) dy.$$

Bew.: O.E.d.A. $0 \le f \le M$.

Sei $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ wie in Prop. 2.[redacted]9; wie im Beweis von [redacted]2.10 ist $\left(\int \varphi_k(x,y)\,d(x,y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Nach Satz 2[redacted]8 ist $\int f_u(x,y)\,d(x,y) = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x,y)\,d(x,y)$.

Für $y \in \mathbb{R}^q$ ist $\psi_{y,k} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$, definiert durch $\psi_{y,k}(x) := \varphi_k(x,y)$, in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^p}$ (vgl. Prop. 1.[redacted]3).

Definiere $g_y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ durch $g_y(x) := f_u(x,y)$.

Dann gilt $\psi_{y,k} \to g_y$ punktweise und monoton; wie im Beweis von 2.[redacted]10 sieht man, dass $\left(\int \psi_{y,k}(x)\,dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Satz [redacted]2.8 $\Rightarrow$ g_y ist integrierbar und

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^p} f_u(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p} g_y(x)\,dx \overset{2.[redacted]8}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \psi_{y,k}(x)\,dx .$$

Definiere $\Phi_k : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ durch $\Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_k(x,y)\,dx$; wie im Beweis von 1.[redacted]3 (bzw. 1.[redacted]4 - Fubini für Treppenfunktionen) sieht man $\Phi_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^q}$; so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^q} \Phi_k(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,d(x,y) \le \int f_u(x,y)\,d(x,y) \underset{\text{wie im Beweis von 2.[redacted]10}}{<} \infty .$$

Die Folge $(\Phi_k)_{\mathbb{N}}$ ist monoton (wegen Monotonie von $(\varphi_k)_{\mathbb{N}}$ und Monotonie des Integrals) und es gilt

$$\Phi_k(y) \to F(y),$$

d. h. $\Phi_k \to F$ monoton und punktweise.

Nach Satz 24.8 ist F integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^q} F(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \Phi_k(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y).$$

$\square$