WWU Münster, Fachbereich 10
Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WS 2017/2018

Übungsblatt 9

Übungen zur Vorlesung Geometrische lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 8.12.2017, 8 Uhr

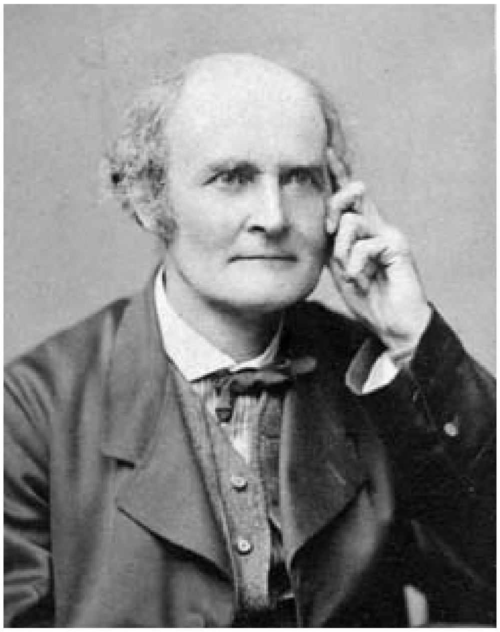
1. Bestimmen Sie mit dem Orthonormierungsverfahren von E. Schmidt eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $U = \left\langle (2,2,1)^T, (1,4,3)^T \right\rangle$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarproduktes.
   Zeichnen Sie U mit Basis jeweils vor und nach der Orthonormierung. (4 Punkte)

2. Es sei $(V, \langle\,.\,,\,.\,\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum, sowie $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir nennen einen Vektor $u \in U$ die *orthogonale Projektion* von $v \in V$ in U, wenn $v = u + w$ mit $w \in U^\perp$ gilt. Zeigen Sie:
   (a) Die orthogonale Projektion ist eindeutig bestimmt.
   (b) Sei $v \in V$ beliebig und $a \in U$ die zugehörige orthogonale Projektion, dann gilt
   $$\|v - a\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U.$$
   Der Vektor $a \in U$ hat also unter allen Vektoren in U minimalen Abstand von v.
   (c) Ist $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Orthonormalbasis von U, so ist $\sum_{i=1}^r \langle v, u_i \rangle \cdot u_i$ die orthogonale Projektion von v auf U. (4 Punkte)

3. Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$ sei die darstellende Matrix $A_{\Phi,\mathcal{B}}$ der Sesquilinearform Φ auf $\mathbb{C}^2$ gegeben durch:
   $$A_{\Phi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie $\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von Φ bezüglich der Basis $\mathcal{C} := (\begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ von $\mathbb{C}^2$.
   (c) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $S^T \cdot A_{\Phi,\mathcal{B}} \cdot \overline{S} = Id_2$. (4 Punkte)

4. **Nikolausaufgabe.** Der Nikolaus wohnt in einem Haus direkt am Nordpol und geht jeden Nachmittag spazieren. Da wir uns in einem kleinen Gebiet um den Nordpol befinden, können wir die Erdkrümmung vernachlässigen und alles im $\mathbb{R}^2$ betrachten. Dabei hat der Nordpol die Koordinaten $(0, 0)$. Beim heutigen Sparziergang bekommt er einen Anruf seiner Wichtel, dass es Probleme in der Produktion gäbe und er sofort zurückkommen müsste. Er solle auf kürzestem Weg zum Rentierexpress kommen, welcher auf der Geraden $x_1 = x_2$ hin und her fährt. An welchem Punkt muss der Rentierexpress auf den Nikolaus warten, wenn dieser sich im Punkt $(10, 16)$ befindet? (4 Punkte*)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?
   (2 Punkte)



Arthur CAYLEY (1821–1895)

Cayley wurde in Richmond, England geboren. Er studierte am Trinity College in Cambridge Mathematik und unterrichtete dort ab 1842 für vier Jahre. Gleichzeitig studierte er Jura und war ab 1849 Rechtsanwalt. Im Jahre 1863 hatte er 300 mathematische Arbeiten publiziert und wurde Professor für Mathematik in Cambridge. Obwohl dies eine deutliche Einkommenseinbuße darstellte, erfüllte sich damit sein Lebenstraum. Cayley entwickelte die Theorie der Matrizen und gab als erster die Definition einer abstrakten Gruppe. Er publizierte fast 1000 Arbeiten zur Mathematik, theoretischen Dynamik und mathematischen Astronomie.

Augustin-Louis CAUCHY (1789–1857)

Cauchy wurde in Paris geboren und studierte Straßen- und Brückenbau an der École Polytechnique und der École des Ponts et Chaussées. Als Ingenieur war er an verschiedenen Bauvorhaben Napoleons beteiligt bis er 1813 nach Paris zurückkehrte. Er wurde 1815 Professor für Mathematik an der École Polytechnique und zwei Jahre später am Collège de France, sowie 1816 Mitglied der Académie des Sciences. Nach der Julirevolution 1830 ging Cauchy ins Exil. Er kehrte 1838 nach Paris zurück und erhielt erst nach der Februarrevolution 1848 seine Professorenstelle zurück. Cauchy publizierte fast 800 Artikel in allen Bereichen der reinen und angewandten Mathematik. Er stellte als erster die Analysis auf eine strenge methodische Basis, lieferte bahnbrechende Beiträge zur Funktionentheorie und begründete die Elastizitätstheorie.

Charles HERMITE (1822–1901)

Hermite wurde in Dieuze in Lothringen geboren und studierte in Nancy und Paris, unter anderem an der École Polytechnique. Von dieser wurde er nach einjährigem Studium wegen einer angeborenen Behinderung seines rechten Beins verwiesen. Er publizierte bereits mit Anfang Zwanzig auf höchstem wissenschaftlichen Niveau, hatte jedoch Mühe, sein Studium abzuschließen. Er unterrichtete von 1848 bis 1876 an der École Polytechnique und von 1869 bis 1897 an der Sorbonne. 1856 wurde er in die Académie des Sciences aufgenommen. Hermite wurde berühmt durch seinen Beweis der Transzendenz von e, aber sein Werk in Algebra, Zahlentheorie und Analysis ist ebenso herausragend.