WWU Münster, Fachbereich 10
Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WS 2017/2018

Übungsblatt 8

Übungen zur Vorlesung Geometrische lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 1.12.2017, 8 Uhr

1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen $\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ Sesquilinearformen sind und entschieden Sie, ob diese symmetrische Bilinearformen, bzw. Hermitesche Formen sind und in welchem Fall dadurch ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum definiert wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) Sei V der Verktorraum der reelwertigen 2×2- Matrizen. Dann ist Φ gegeben durch $\Phi(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (b) Sei $V = C^0([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetige Funktion$\}$. Dann ist die Abbildung Φ gegeben durch $\Phi(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$ für alle $g, f \in V$.

   Erinnerung über komplexwertige Funktionen: Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Dann lässt sie sich als $f = u + i \cdot v$ für reele Funktion $u, v : I \to \mathbb{R}$ schreiben.
   Eine komplexwertige Funktion $f = u + i \cdot v$ heißt stetig falls u und v stetig sind.
   Das Integral einer komplexwertige Funktion $f = u + i \cdot v$ über I ist definiert als

   $$\int\limits_a^b f(t)dt := \int\limits_a^b u(t)dt + i \cdot \int\limits_a^b v(t)dt$$

   (4 Punkte)

2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $\Phi_1, \Phi_2 : V \times V \to \mathbb{K}$ zwei symmetrische Bilinerarformen, bzw. Hermitesche Formen auf V. Zeigen Sie

   falls $\Phi_1(v, v) = \Phi_2(v, v)$ für alle $v \in V$ gilt, so folgt beteits $\Phi_1 = \Phi_2$.

   (Hinweis: Berechnen Sie $\Phi_1(\alpha v + w, \alpha v + w)$ für geeignetes $\alpha \in \mathbb{K}$.) (4 Punkte)

3. Es sei $(V, \langle\, .\, ,\, .\, \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Desweiteren bezeichne $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die *Länge* eines Vektors $v \in V$. Zeigen Sie

   (a) folgende Version der Dreiecksungleichung:
   $$\big|\, \|u\| - \|v\|\, \big| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in V.$$

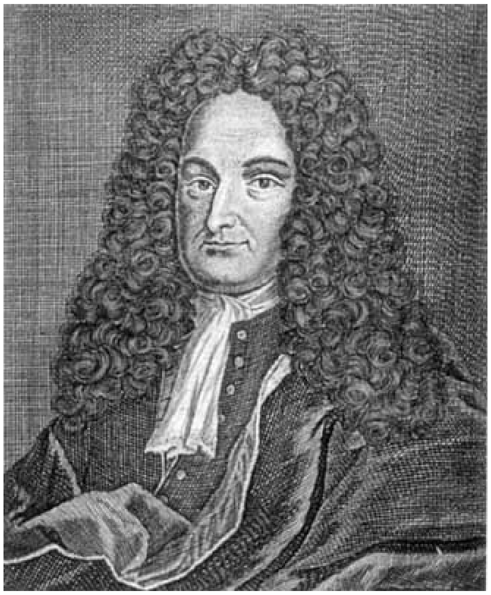
   (b) die Parallelogrammidentität:
   $$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \forall u, v \in V.$$

   (c) **(Satz des Pythagoras)** falls für $u, v \in V$ gilt $u \perp v$, so ist $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

   (4 Punkte)

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

   (2 Punkte)



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
Leibniz wurde in Leipzig geboren und studierte dort und in Jena Philosophie, Jura und Mathematik. Ab 1667 war er Hofrat des Kurfürsten von Mainz. Er reiste nach Paris und London, wo er in die königliche Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. In 1676 wurde er Hofrat und Bibliothekar des Herzogs von Hannover. Auf sein Betreiben hin wurde 1700 die Berliner Akademie der Wissenschaften gegründet, deren Präsident er wurde. Leibniz war Universalgelehrter und arbeitete als Diplomat, Rechtsgelehrter, Mathematiker, Physiker und Historiker. Seine Algorithmen und Notationen für die Differentialrechnung sind noch heute in Gebrauch.

Sir William R. HAMILTON (1805–1865)
Hamilton wurde im irischen Dublin geboren. Er studierte am Trinity College in Dublin und wurde dort 1827, noch vor Erlangung seines Bachelor-Abschlusses, bereits Professor und königlicher Astronom Irlands. Er formulierte das Hamiltonsche Prinzip in der klassischen Mechanik, welches zur Herleitung von Bewegungsgleichungen dient. Ebenso bedeutend sind seine Arbeiten zur Optik. Hamilton wurde 1832 Mitglied der Royal Irish Academy, war von 1837 bis 1845 ihr Präsident und wurde 1835 geadelt. Er erfand die Quaternionen, eine vierdimensionale Divisionsalgebra über dem Körper der reellen Zahlen. Mit der vergeblichen Suche nach weiteren reellen Divisionsalgebren verbrachte er die letzten dreißig Jahre seines Lebens.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)
Gauß wurde in Braunschweig geboren und studierte Mathematik in Braunschweig und Göttingen. Mit 18 Jahren entdeckte er, dass das reguläre 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. 1807 wurde er Direktor der Sternwarte Göttingen und blieb dies bis zu seinem Lebensende. Zwischen 1818 und 1825 vermaß er das Königreich Hannover. Gauß gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. Alle Gebiete der Mathematik wurden durch seine Ideen maßgeblich befruchtet. Leider sind viele seiner Erkenntnisse unpubliziert und nur durch seine Tagebuchaufzeichnungen der Nachwelt bekannt.