WWU Münster, Fachbereich 10
Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WS 2017/2018

Übungsblatt 7

Übungen zur Vorlesung Geometrische lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 24.11.2017, 8 Uhr

1. (a) Es sei $0 \neq P \in \mathbb{R}[X]$. Beweisen Sie, dass es reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^\times$, komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sowie natürliche Zahlen $n_j, m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt mit

$$\begin{aligned} P(X) &= c \cdot \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{n_j} \cdot \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_k)^{m_k} (X - \overline{\lambda_k})^{m_k} \\ &= c \cdot \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{n_j} \cdot \prod_{k=1}^{s} (X^2 - 2\mathcal{R}e(\lambda_k) X + |\lambda_k|^2)^{m_k}. \end{aligned}$$

(b) Es sei $f \in End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ und $A = (a_{ij}) = {}_{\mathscr{B}}[f]_{\mathscr{B}}$ die darstellende Matrix bezüglich einer Basis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{C}^n$. Wir nehmen an, dass alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$ liegen. Beweisen Sie:
Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f ist, so auch die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda}$.

(4 Punkte)

2. Sind folgende reelle Matrizen diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren sowie - im Falle der Diagonalisierbarkeit - eine Basiswechselmatrix $S \in GL_3(\mathbb{R})$, für die $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4/5 \\ -8 & 5 & 8/5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (4 Punkte)

3. **(Austauschprozesse und stochastische Matrizen)**
In einem Wildreservat leben Tiere, von denen jedes täglich eine der Tränken a, b oder c aufsucht. Am Tag k seien a_k, b_k und c_k die Anzahlen der Tiere an den Tränken a, b bzw. c. Das Wechselverhalten der Tiere von einem Tag zum nächsten wird durch folgende *Übergangsmatrix* A beschrieben:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Da die Gesamtanzahl der Tiere konstant bleibt und sie lediglich die Tränken wechseln spricht man von einem *Austauschprozess*. Weitere Erklärungen finden Sie auf der Rückseite.

(a) Am 18. Mai trinken an den Tränken a 6600 Tiere, an b 8100 Tiere und an c 7200 Tiere. Bestimmen Sie wieviele Tiere am 17., 19., 20. Mai an den Tränken trinken.

(b) Gibt es eine *stabile Verteilung* der Tiere, bei der trotz ihres Wechselverhaltens die Anzahl der Tiere an den drei Tränken von Tag zu Tag konstant bleibt? Bestimmen Sie diese, wenn es sie gibt.

(c) Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *stochastische Matrix*, falls $0 \leq a_{ij} \leq 1$ für alle i, j und die Summe $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ der Einträge in jeder Spalte gleich 1 ist. Ein Beispiel ist die Matrix A aus (1). Zeigen Sie, dass jede stochastische Matrix den Eigenwert 1 besitzt und erklären Sie, was dies mit Teil (b) zu tun hat. (4 Punkte)

bitte wenden

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

(2 Punkte)

Austauschprozesse und stochastische Matrizen

Ein Prozess, der ein Wechselverhalten (von Tieren, Menschen, etc.) beschreibt heißt ein *Austauschprozess*, wenn die Gesamtanzahl konstant bleibt, aber sich die Verteilung (der Tiere, Menschen, etc.) auf verschiedene Möglichkeiten (wie z.B. die Tränken a, b und c aus Aufgabe 3) ändern kann.
Austauschprozesse können mittels einer Übergangsmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gebeben sein, bei der für alle Einträge a_{ij} gilt $0 \leq a_{ij} \leq 1$. D.h. ist $x^{\text{alt}} = \begin{pmatrix} x_1^{\text{alt}} \\ \vdots \\ x_n^{\text{alt}} \end{pmatrix}$ die Verteilung vor dem Wechsel und $x^{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x_1^{\text{neu}} \\ \vdots \\ x_n^{\text{neu}} \end{pmatrix}$ die Verteilung nach dem Wechsel, so gilt

$$x^{\text{neu}} \ = \ A \cdot x^{\text{alt}} .$$

In diesem Fall ist A eine stochastische Matrix. Die Eigenschaft, dass die Summe der Einträge in jeder Spalte gleich 1 ist, d.h. also dass $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ für alle j ist, entspricht dabei genau der Eigenschaft, dass die Gesamtanzahl (der Tiere, Menschen, etc.) konstant ist.

Beweis. Sei $G^{\text{alt}} := \sum_{i=1}^n x_i^{\text{alt}} = (1, \ldots, 1) \cdot x^{\text{alt}}$ die Gesamtanzahl vor dem Wechsel und $G^{\text{neu}} := \sum_{i=1}^n x_i^{\text{neu}} = (1, \ldots, 1) \cdot x^{\text{neu}}$ die Gesamtanzahl nach dem Wechsel. Gilt nun

$$x^{\text{neu}} \ = \ A \cdot x^{\text{alt}} ,$$

so gilt $G^{\text{neu}} = (1, \ldots, 1) \cdot x^{\text{neu}} \ = \ (1, \ldots, 1) \cdot A \cdot x^{\text{alt}}$. Die Eigenschaft $G^{\text{neu}} = G^{\text{alt}}$ ist äquivalent zu der Gleichung

$$(1, \ldots, 1) \cdot A \cdot x^{\text{alt}} \ = \ (1, \ldots, 1) \cdot x^{\text{alt}} .$$

Diese Gleichung gilt für alle $x^{\text{alt}} \in \mathbb{R}^n$ (d.h. also unabhängig von der Verteilung vor dem Wechsel) genau dann, wenn $(1, \ldots, 1) \cdot A = (1, \ldots, 1)$ ist. Wegen $(1, \ldots, 1) \cdot A = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} \right)$, ist letztere Gleichung äquivalent dazu, dass A eine stochastische Matrix ist. $\square$

Eine Verteilung x^{alt} heißt eine *stabile Verteilung*, falls $x^{\text{neu}} = A \cdot x^{\text{alt}} = x^{\text{alt}}$ ist, d.h. also falls x^{alt} ein Eigenvektor von A ist.

(Hinweis zu Aufgabe 3(c): Was hat die Gleichung $(1, \ldots, 1) \cdot A = (1, \ldots, 1)$ mit $\det(A - \mathrm{Id}_n)$ zu tun?)