WWU Münster, Fachbereich 10
Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WS 2017/2018

Übungsblatt 6

Übungen zur Vorlesung Geometrische lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 17.11.2017, 8 Uhr

1. Sei K ein Körper. $K[X]$ bezeichne den Polynomring über K in der Variablen X, $Abb(K,K)$ sei die Menge der Abbildungen $K \to K$. Sei

$$\phi : K[X] \to Abb(K,K)$$

die Abbildung, die jedem Polynom $f \in K[X]$ die zugehörige Polynomfunktion $f \in Abb(K,K)$ zuordnet. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann nicht injektiv ist, wenn K endlich ist.

(2 Punkte)

2. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende komplexe Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

3. (Euklidischer Algorithmus)

(a) Es seien f_1 und f_2 zwei ganze Zahlen mit $f_1 \geq f_2 > 0$. Dann berechnen wir f_i und q_i für $i \geq 3$ rekursiv per Division mit Rest

$$f_{i-2} = q_i f_{i-1} + f_i, \qquad 0 \leq f_i < f_{i-1}$$

Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $f_{m+1} = 0 \neq f_m$ und dass f_m der größte gemeinsame Teiler von f_1 und f_2 ist. Zeigen Sie ferner: Setzt man $g_1 = 1 = h_2$ und $g_2 = 0 = h_1$ und $g_i := g_{i-2} - q_i g_{i-1}$ und $h_i := h_{i-2} - q_i h_{i-1}$, so gilt $f_i = f_1 g_i + f_2 h_i$ für alle i und insbesondere $f_m = ggT(f_1, f_2) = f_1 g_m + f_2 h_m$.
Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $f_1 = 324$ und $f_2 = 44$ und die Zahlen g_m und h_m. Legen Sie dazu eine Tabelle an der Form

i	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	q_i	g_i	h_i
1	—	—	f_1	—	1	0
2	—	f_1	f_2	—	0	1
3	f_1	f_2	...	...	...	...

(b) Analog können wir den Algorithmus für zwei Polynome f_1 und $f_2 \in K[X]$ mit $Grad(f_1) \geq Grad(f_2) \geq 0$ definieren. Dabei findet man in jedem Schritt Polynome $f_i, q_i \in K[X]$ mit $Grad(f_i) < Grad(f_{i-1})$.
Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $f_1 = X^4 + X - 2$ und $f_2 = X^3 - X$ und Polynome g_m und h_m mit $ggT(f_1, f_2) = f_1 g_m + f_2 h_m$.

(8 Punkte)

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

(2 Punkte)