

Übungen zur Vorlesung Geometrische lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 19.01.2018 , 8 Uhr

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ ein *einschaliges Hyperboloid*. Zeigen Sie, dass durch jeden Punkt $P \in Q$ genau zwei Geraden verlaufen, die ganz in Q enthalten sind.
(Hinweis: <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid>.) (4 Punkte)

2. Seien $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie:
- (a) Ist f eine Kongruenzabbildung mit $f(P) = P$ und $f(Q) = Q$, so ist f entweder die Identität, oder die Spiegelung an der Geraden durch P und Q .
 - (b) Ist f eine Kongruenzabbildung mit $f(P) = P$ und $f(Q) = Q$ und $f(R) = R$, so ist f die Identität.
- (4 Punkte)

3. Sei \mathbb{R}^2 versehen mit der Norm $\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Zeigen Sie:
- (a) Jede bijektive Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\|f(x) - f(y)\|_\infty = \|x - y\|_\infty$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$, ist von der Form $f(x) = v + A \cdot x$ mit $v \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
(Hinweis: Betrachten Sie $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $y = 0$.)
 - (b) Die dadurch definierte Gruppe der „Kongruenzabbildungen“
$$\text{Kong}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) := \{ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ bijektiv, } \|f(x) - f(y)\|_\infty = \|x - y\|_\infty \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \}$$
ist eine Untergruppe der Gruppe $\text{Kong}(\mathbb{R}^2)$ aus der Vorlesung.
 - (c) Es gibt Teilmengen M, N des \mathbb{R}^2 , welche kongruent sind unter der Gruppe $\text{Kong}(\mathbb{R}^2)$, aber nicht unter der Gruppe $\text{Kong}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
- (4 Punkte)

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?
(2 Punkte)