WWU Münster, Fachbereich 10
Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WS 2017/2018

Übungsblatt 11

Übungen zur Vorlesung Geometrische lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 22.12.2017, 8 Uhr

1. Sei $f : x \mapsto A \cdot x$ der Endomorphismus des $\mathbb{C}^3$ gegeben durch die Matrix

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2i & 0 & -4 \\ 0 & i & 0 \\ -4 & 0 & -2i \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Definiert f eine Isometrie bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^3$? (4 Punkte)

2. Betrachten Sie den $\mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *Permutationsmatrix*, wenn es eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $A = E_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ gibt. Zeigen Sie:

   (a) Jede Permutationsmatrix ist invertierbar und die Abbildung $\pi : S_n \to GL_n(\mathbb{R})$, $\sigma \mapsto E_\sigma$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus. (Dabei bedeutet *Gruppenhomomorphismus*, dass $\pi(\sigma \circ \tau) = \pi(\sigma) \cdot \pi(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt.)

   (b) $E_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$ für alle $\sigma \in S_n$

   (c) Ist $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$ mit positiven Koeffizienten $a_{ij} \geq 0$, dann ist A eine Permutationsmatrix. (Hinweis: $A^T \cdot A = A \cdot A^T = \mathrm{Id}_n$.)

   (4 Punkte)

3. Gegeben seien zwei Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit Länge $\|v\| = \|w\| = 1$. Bestimmen Sie explizit alle Isometrien des $\mathbb{R}^2$, die den Vektor v auf den Vektor w abbilden.

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

   (2 Punkte)