

## Übungen zur Vorlesung Geometrische lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 15.12.2017, 8 Uhr

1. Überprüfen Sie, ob folgende Matrizen positiv definit sind:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

2. Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Sei  $f : V \rightarrow V$  eine  $\mathbb{R}$  lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) Für alle  $x, y \in V$  gilt:  $x \perp y \implies f(x) \perp f(y)$ .
- (b) Für alle  $v, w \in V$  gilt:  $\|v\| = \|w\| \implies \|f(v)\| = \|f(w)\|$ .
- (c) Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , sodass  $\|f(x)\| = c\|x\|$  für alle  $x \in V$ .
- (d)  $f$  ist von der Gestalt  $f = a \cdot g$  für eine Isometrie  $g : V \rightarrow V$  und ein  $a \in \mathbb{R}$ .

Was passiert mit den Aussagen, falls  $f$  ein Isomorphismus ist?

(Hinweis: Für (a)  $\iff$  (b) zeigen Sie zunächst, dass  $\|x + y\| = \|x - y\| \iff x \perp y$  gilt. Für

(a), (b)  $\implies$  (d) betrachten Sie eine ONB und setzen  $a := \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$  für einen Basisvektor  $x$ .)

(4 Punkte)

3. Die Bilinearform  $\Phi$  auf  $V := \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

Ferner sei die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Bestimmen Sie  $A_{\Phi, \mathcal{E}}$ , wobei  $\mathcal{E}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$  ist.
- (b) Ist  $\Phi$  ein Skalarprodukt? Begründen sie Ihre Antwort.
- (c) Seien  $v_1 = (1, 14)^T, v_2 = (-5, 8)^T, v_3 = (1, 1)^T, v_4 = (5, 5)^T \in V$  gegeben. Berechnen Sie die Längen und die Schnittwinkel der Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  und  $v_4$ .
- (d) Ist  $f$  bezüglich  $\Phi$  eine Isometrie? (4 Punkte)

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

(2 Punkte)