Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

11. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 3.7.15, 8 Uhr

1. (a) Es sei X ein topologischer Raum, $x, y \in X$ mit $x \in \overline{\{y\}}$. Man zeige, ist $U \subseteq X$ offen und $x \in U$, so gilt $y \in U$.

   (b) Es sei R ein lokaler Ring und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. Man zeige, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),\mathfrak{m}} = R$ gilt.

   Es sei nun X ein Schema und $x \in X$.

   (c) Man zeige, dass es genau einen Morphismus $(f, f^\#)\colon \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$ von Schemata gibt mit $f(\mathfrak{m}_x) = x$ und $f^\#_x = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{X,x}}$. [Hinweis: Man verwende Teil (a), um sich auf den affinen Fall zu beschränken.]

   (d) Man zeige, dass $f\colon \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \{y \in X : x \in \overline{\{y\}}\}$ bijektiv ist. [Hinweis: Blatt 5, Aufgabe 3.] *(4 Punkte)*

2. Es sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, der den Schemamorphismus $(f, f^\#) := \mathrm{Spec}\,\varphi\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ induziert. Man zeige:

   (a) Falls φ surjektiv ist, so ist f injektiv.

   (b) Falls φ injektiv ist, so ist das Bild von f dicht in $\mathrm{Spec}(A)$. *(4 Punkte)*

3. Die *Homogenisierung* eines Polynoms $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ bezüglich x_0 ist durch

$$f^h := x_0^{\deg(f)} f\left(\tfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_0}\right) \in k[x_0, \ldots, x_n]$$

   definiert; entsprechend ist $I^h := (f^h : f \in I)$ die Homogenisierung eines Ideals $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. Man zeige:

   (a) $I^h \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$ ist ein homogenes Ideal.

   (b) Sei jetzt k algebraisch abgeschlossen. Die projektive algebraische Menge $V_{\mathbb{P}^n}(I^h)(k) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist der Abschluss der affinen algebraischen Menge

$$V_{\mathbb{A}^n}(I)(k) \subseteq \mathbb{A}^n(k) \cong \mathbb{P}^n(k) \smallsetminus V_{\mathbb{P}^n}(x_0)(k) \subseteq \mathbb{P}^n(k).$$

   Wir nennen sie daher den *projektiven Abschluss.* *(4 Punkte)*

4. Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ kompakt in der metrischen Topologie ist, für welche die natürliche Abbildung $\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ stetig bezüglich der metrischen Topologie auf $\mathbb{C}^{n+1}$ ist. [Hinweis: Man schreibe jeden Punkt $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ in der Form $P = (a_0 : \ldots : a_n)$ mit $|a_0|^2 + \ldots + |a_n|^2 = 1$.] *(2 Punkte)*

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*