Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

10. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 26.6.15, 8 Uhr

1. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum, $U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Wir definieren $D_U(f) := \{x \in U : f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$, wobei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$ und f_x den Keim von f im Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichne.

   (a) Es sei $V \subseteq U$ offen. Man zeige, dass $D_U(f) \cap V = D_V(f|_V)$ gilt.

   (b) Man zeige, dass $D_U(f) \subseteq U$ offen ist.

   (c) Man zeige, dass genau dann $D_U(f) = U$ gilt, wenn $f \in \mathcal{O}_X(U)^\times$ gilt.

   (4 Punkte)

2. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und R ein Ring. Man zeige, dass die Zuordnung

$$\big\{\, (f, f^\#)\colon X \to \operatorname{Spec} R \mid \text{Morphismen von lok. ger. R.} \,\big\} \to \operatorname{Hom}\big(R, \mathcal{O}_X(X)\big)$$

   gegeben durch $(f, f^\#) \mapsto f^\#_{\operatorname{Spec} R}$ bijektiv ist. [Hinweis zur Surjektivität: Man definiere zunächst eine Abbildung $f\colon X \to \operatorname{Spec}(R)$ durch

$$f(x) := \ker(R \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x))$$

   und zeige das diese stetig ist. Durch die universelle Eigenschaft der Lokalisierung erhält man dann $f^\#$.] *(4 Punkte)*

3. (a) Sei A ein Ring, $X = \operatorname{Spec} A$ und $f \in A = \mathcal{O}_X(X)$. Zeigen Sie, dass der lokal geringte Raum $\big(D_X(f), \mathcal{O}_X|_{D_X(f)}\big)$ isomorph zu $\operatorname{Spec} A_f$ ist. [Hinweis: $A \to A_f$ induziert einen Morphismus $\operatorname{Spec} A_f \to \operatorname{Spec} A$, invers zu dem Morphismus $\big(D_X(f), \mathcal{O}_X|_{D_X(f)}\big) \to \operatorname{Spec} A_f$ von Aufgabe 2.]

   (b) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie, dass $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ebenfalls ein Schema ist. $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ heißt ein *offenes Unterschema* von $(X, \mathcal{O}_X)$. *(4 Punkte)*

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*