Algebraische Geometrie
SoSe 2015

Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

9. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 19.6.15, 8 Uhr

1. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl.
   (a) Man beschreibe das Spektrum $X := \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ als topologischen Raum.
   (b) Man gebe für jede offene Menge $U \subset X$ den Ring $\mathcal{O}_X(U)$ und für jedes Paar $U' \subset U \subset X$ von offenen Mengen den Ringhomomorphismus $\rho_{U,U'} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U')$ an.
   (c) Man berechne für jeden Punkt $x \in X$ den lokalen ring $\mathcal{O}_{X,x}$ und den *Restklassenkörper* $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$, wobei $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das eindeutige maximale Ideal ist. *(4 Punkte)*

2. Sei X ein topologischer Raum, $Z \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in Z$. Wir nennen x einen *generischen Punkt* von Z, wenn $Z = \overline{\{x\}}$. Man zeige:
   (a) Ist x ein generischer Punkt von Z und $\emptyset \neq U \subset Z$ offen, so ist $x \in U$.
   (b) Wenn Z einen generischen Punkt besitzt, dann ist Z irreduzibel.
   (c) Wenn $X = \operatorname{Spec} A$ ist für einen Ring A, so gilt auch die Umkehrung von (b). Außerdem ist der generische Punkt eindeutig bestimmt.
   [Hinweis: $V_A(I) \subset \operatorname{Spec} A$ irreduzibel $\overset{!}{\Longrightarrow}$ $Rad(I)$ ist ein Primideal.]
   (d) Es sei A ein Hauptidealring mit unendlich vielen maximalen Idealen (zum Beispiel $A = \mathbb{Z}$ oder $A = k[T]$ für einen Körper k). Man zeige, dass jede Teilmenge $V \subseteq X$ bestehend aus unendlich vielen maximalen Idealen irreduzibel ist, aber keinen generischen Punkt hat. *(4 Punkte)*

3. Es sei A ein Ring und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Ferner sei $I \subseteq A$ ein Ideal und $\pi : A \twoheadrightarrow A/I$ der kanonische Epimorphismus.
   (a) Man zeige, dass $T := \pi(S)$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A/I ist und dass $S^{-1}I := \{\frac{a}{s} \in S^{-1}A : a \in I, s \in S\}$ ein Ideal in $S^{-1}A$ ist.
   (b) Man zeige, dass die Ringe $S^{-1}(A)/S^{-1}I$ und $T^{-1}(A/I)$ isomorph sind.
   (c) Es sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal. Man zeige, dass $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ isomorph ist zum Quotientenkörper von $A/\mathfrak{p}$.
   (d) Es sei $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/(p)$ der endliche Körper mit p Elementen. Man beschreibe alle Punkte von $X := \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[t])$ und berechne die *Restklassenkörper* $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ für alle $x \in X$, wobei $\mathfrak{m}_x$ das eindeutige maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$ beschreibt. *(4 Punkte)*

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*