Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

8. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 12.6.15, 8 Uhr

1. Es sei A ein Ring und $Rad(0) := \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$. Man zeige:
   (a) $Rad(0)$ ist in jedem Primideal von A enthalten.
   (b) $Rad(0)$ ist genau dann ein Primideal, wenn $\operatorname{Spec} A$ irreduzibel ist.
   (c) A ist genau dann ein Integritätsring, wenn A reduziert und $\operatorname{Spec} A$ irreduzibel ist.
   (d) Die Mengen $\operatorname{Spec} A$ und $\operatorname{Spec}(A/Rad(0))$ stehen in kanonischer Bijektion zueinander. *(4 Punkte)*

2. Es sei A ein noetherscher Ring. Man zeige, dass $\operatorname{Spec} A$ als topologischer Raum noethersch ist. *(2 Punkte)*
   Bemerkung. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, wie der nicht-noethersche Ring $A = k[x_1, x_2, \ldots]/(x_1^2, x_2^2, \ldots)$ zeigt, für den $\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{m}\}$ nur den einzigen Punkt $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \ldots) = Rad(0)$ hat.

3. (a) Man zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} A & \longrightarrow & \{V \subseteq \operatorname{Spec} A : V \text{ irreduzibel und abgeschlossen }\} \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \overline{\{\mathfrak{p}\}} \ = \ V_A(\mathfrak{p}) \end{array}$$

   wohldefiniert und bijektiv ist.
   [Hinweis für die Surjektivität: Man zeige wie in Proposition 1.3.2:
   Falls $V = V_A(I)$ irreduzibel mit $I = Rad(I)$ ist, so ist I ein Primideal.]
   (b) Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$. Man zeige, dass es eine Bijektion gibt:

$$\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \{V \subseteq \operatorname{Spec} A : \mathfrak{q} \in V \text{ irreduzibel und abgeschlossen }\}.$$

   (4 Punkte)

4. Sei A ein Ring. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $\operatorname{Spec} A$ ist nicht zusammenhängend.
   (b) Es gibt $e_1, e_2 \in A \setminus \{0\}$ mit $e_1 e_2 = 0, e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 + e_2 = 1$. (Solche Elemente heißen *orthogonale Idempotente*; *idem*=„dasselbe“ (Latein); *idempotent*=„eine Potenz ist gleich demselben“.)
   (c) A ist isomorph zu einem direkten Produkt $A_1 \times A_2$ von Ringen mit A_i ungleich dem Nullring (0).

[Hinweis zu (a)$\Longrightarrow$(b): Ist $\operatorname{Spec} A = V_A(I_1) \cup V_A(I_2)$ mit $V_A(I_1) \cap V_A(I_2) = \emptyset$, so findet man $f_i \in I_i$ mit $1 = f_1 + f_2$ und $(f_1 f_2)^\ell = 0$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dann $1 \in Rad(f_1^\ell, f_2^\ell)$ und finden Sie damit $e_i \in (f_i^\ell)$ mit $1 = e_1 + e_2$ und $e_1 e_2 = 0$. Warum ist $e_1 \neq 0 \neq e_2$?] *(4 Punkte)*

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*