Aufgabe 1

(a) Für $P \in X$ ist $(xyz)(P) = 0$ und daher $x(P) = 0$ oder $y(P) = 0$ oder $z(P) = 0$. Daraus folgt $X = V(x+y+z,x)(k) \cup V(x+y+z,y)(k) \cup V(x+y+z,z)(k) = V(y+z,x)(k) \cup V(x+z,y)(k) \cup V(y+z,x)(k)$.
Wir zeigen nun, dass dies die irreduziblen Komponenten sind, indem wir uns oBdA nur $V(y+z,x)(k)$ anschauen. Beachte dafür, dass für

$$\Phi : k[x,y,z] \twoheadrightarrow k[y],\ \Phi(x) = 0,\ \Phi(y) = y,\ \Phi(z) = -y$$

$\ker(\Phi) = (y+z,x)$ gilt. Damit folgt $\ker(\Phi)$ ist ein Primideal und auch $\dim(X) = \dim(k[x,y,z]/\ker(\Phi)) = \dim k[y] = 1$.

(b) $Y = V(x^2 - yz, x)(k) \cup V(x^2 - yz, z-1)(k) = V(yz,x)(k) \cup$
$V(x^2 - y, z-1)(k) = V(y,x)(k) \cup V(z,x)(k) \cup V(x^2 - y, z-1)(k)$.
Wir zeigen nun, dass dies die irreduziblen Komponenten sind. Dabei sind $V(y,x)(k)$ und $V(z,x)(k)$ klar mit $\dim(V(y,x)(k)) = \dim(V(z,x)(k)) = 1$. Ansonsten beachte, dass für

$$\Phi : k[x,y,z] \twoheadrightarrow k[x],\ \Phi(x) = x,\ \Phi(y) = x^2,\ \Phi(z) = 1$$

$\ker(\Phi) = (x^2 - y, z-1)$ gilt. Somit folgt auch $\dim(Y) = 1$.

(c) $Z = V(xz,yz)(k) = V(xz,y)(k) \cup V(xz,z))(k) = V(xz,y)(k) \cup V(z)(k) = V(x,y)(k) \cup V(z,y)(k) \cup V(z)(k) = V(x,y)(k) \cup V(z)(k)$.
Dabei ist $V(z,y)(k) \subset V(z)(k)$ und beide sind irreduzibel. Somit sind $V(x,y)(k)$ und $V(z)(k)$ die irreduziblen Komponenten sind mit den Dimensionen $\dim(V(x,y)(k)) = 1$ und $\dim(V(z)(k)) = 2$, also $\dim(Z) = 2$.

Aufgabe 2

(a) Da $U = D_X(t)$, gilt $\mathcal{O}_X(U) = k[t]_t = k[t, t^{-1}]$ nach Proposition 1.5.9.

(b) Sei $g \notin k[x, y]^\times$. Sei $g = g_1^{n_1} \cdots g_r^{n_r}$ die Primfaktorzerlegung. Dann gilt

$$V(g) = \bigcup_{i=1}^{r} V(g_i).$$

Nach Blatt 4, Aufgabe 1 b) sind die $V(g_i)$ aber irreduzibel. Wäre $V(g)(k)$ endlich, so wäre $V(g_i)(k)$ endlich und irreduzibel und bestünde aus genau einem Punkt, d.h. $V(g_i)(k) = V(x - a_1, y - a_2)(k)$ und somit $(g_i) = (x - a_1, y - a_2)$. Damit gilt aber $g_i \mid x - a_1$ und $g_i \mid y - a_2 \Rightarrow g_i \in k[x, y]^\times \lightning$
Also ist $V(g_i)$ unendlich und somit auch $V(g)$.

(c) Behauptung: $k[x, y] = \mathcal{O}_X(U)$

"$\subset$" klar.

"$\supset$" Sei $\frac{f}{g} = q \in \mathcal{O}_X(U) \subset k(x, y)$ mit f und g teilerfremd. Dies ist möglich, da $k[x, y]$ ein faktorieller Ring ist. Sei nun $P \in U$ beliebig. Wegen $q \in \mathcal{O}_{X,P}$ gibt es $f', g' \in k[x, y]$ mit $q = \frac{f'}{g'}$ und $g'(P) \neq 0$. Daraus folgt $f'g = fg'$ in $k[x, y]$. Da $k[x, y]$ ein faktorieller Ring ist und f und g teilerfremd sind, folgt $g|g'$, d.h. $g' = gh$ mit $h \in k[x, y]$. Wegen $g'(P) \neq 0$ folgt $g(P) \neq 0$.
Wir sehen also, dass g keine Nullstelle auf U hat und $V(g)(k) \subset \{(0, 0)\}$ eine endliche Menge ist. Nach (b) ist daher g eine Einheit in $k[x, y]$ und $q = g^{-1}f \in k[x, y]$.

(d) Da das Polynom $y^2 - x^3 \in k(x)[y]$ in der Variablen y keine Nullstelle in $k(x)$ besitzt, ist es irreduzibel in $k(x)[y]$ und damit auch in $k[x, y]$. Also ist $(x^3 - y^2)$ ein Primideal und $I(X) = Rad(x^3 - y^2) = (x^3 - y^2)$. Es folgt $\Gamma(X) = k[x, y]/(x^3 - y^2)$.
Es gilt nun $V(x^3 - y^2, x)(k) = \{(0, 0)\}$ und somit $U = X \smallsetminus \{(0, 0)\} = X \smallsetminus V(x)(k) = D_X(x)$. Nach Proposition 1.5.9 gilt $\mathcal{O}_X(U) = \Gamma(X)_x = (1, x, x^2, \ldots)^{-1}\Gamma(X)$. Betrachte

$$\Phi : k[x, y] \longrightarrow k[t, t^{-1}], x \mapsto t^2, y \mapsto t^3$$

Da $(x^3 - y^2) \subset \ker(\Phi)$ und $\Phi(x) = t^2 \in k[t, t^{-1}]^\times$ gilt, folgt nach dem Homomorphiesatz und nach Blatt 5 Aufgabe 2, dass Φ einen Ringhomomorphismus

$$\overline{\Phi} : \mathcal{O}_X(U) = \Gamma(X)_x = \big(k[x, y]/(x^3 - y^2)\big)_x \longrightarrow k[t, t^{-1}]$$

induziert. Dieser besitzt $\Psi : k[t, t^{-1}] \to \mathcal{O}_X(U), t \mapsto \frac{y}{x}, t^{-1} \mapsto \frac{y}{x^2}$ als Umkehrabbildung, denn $\overline{\Phi} \circ \Psi : t \mapsto t, t^{-1} \mapsto t^{-1}$ und $\Psi \circ \overline{\Phi} : x \mapsto (\frac{y}{x})^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x$, sowie $\Psi \circ \overline{\Phi} : y \mapsto (\frac{y}{x})^3 = \frac{y^3}{x^3} = \frac{y^3}{y^2} = y$.

Aufgabe 3

(a) Sei $I(X) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ das Verschwindungsideal von X und $\Gamma(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Sei $F \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $f = F \mod I(X)$. Die Abbildung $f : X \to \mathbb{A}^1(k) = k$ ist gegeben durch

$$P = (a_1, \dots, a_n) \longmapsto f(P) := F(a_1, \dots, a_n).$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung stetig ist. Sei dazu $V = V(I)(k) \subset \mathbb{A}^1(k)$ eine abgeschlossene Menge mit $I \subset k[y]$, wobei y die Koordinate auf $\mathbb{A}^1(k)$ sei. Wir betrachten zu diesem Zweck den Ringhomomorphismus $\Phi : k[y] \to k[x_1, \dots, x_n],\ y \mapsto F,\ g(y) \mapsto g(F)$ und den induzierten Homomorphismus $\overline{\Phi} : k[y] \to \Gamma(X), y \mapsto f, g(y) \mapsto g(f) = g(F) \mod I(X)$. Dann gilt

$$g(f(P)) \;=\; g(F(a_1, \dots, a_n)) \;=\; \Phi(g)(a_1, \dots, a_n) \;=\; \overline{\Phi}(g)(P).$$

Wir berechnen also das Urbild

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(V(I)(k)\big) &= \{P \in X \mid f(P) \in V(I)(k)\} \\ &= \{P \in X \mid 0 = g(f(P)) = \overline{\Phi}(g)(P)\ \forall\, g \in I\} \\ &= V_X\big(\overline{\Phi}(I)\big) \end{aligned}$$

und somit ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter f wieder abgeschlossen. Dies zeigt, dass f stetig bzgl. der Zariski-Topologie ist.

(b) Sei $X = \mathbb{A}^1(k)$. Dann wissen wir, dass jede Bijektion $f : X \to X$ stetig bezüglich der Zariskitopologie ist, weil endliche Mengen auf endliche geschickt werden. Betrachte nun $\varphi : X \to X,\ 1 \mapsto 0,\ 0 \mapsto 1, \varphi|_{X\setminus\{0,1\}} = \mathrm{id}$. Diese ist bijektiv und somit stetig. Wäre ϕ von der Form $P \mapsto f(P)$ für ein $f \in k[x]$, so würde für $a \neq 0, 1$ der Punkt $P = (a)$ abgebildet auf $P = \phi(P) = f(a)$. Dies zeigt, dass $f(a) = a$ für alle $a \neq 0, 1$ und es folgt $f(x) = x$. Wir erhalten den folgenden Widerspruch für $P = (0)$:

$$1 \;=\; \phi(P) \;=\; f(0) \;=\; 0.$$

Also kann ϕ nicht von der Form $P \mapsto f(P)$ für ein $f \in k[x]$ sein.