Algebraische Geometrie
 SoSe 2015

Prof. Dr. Urs Hartl
 Mark Feldmann

6. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 22.5.15, 8 Uhr

1. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

   (a) Man bestimme die irreduziblen Komponenten von
   $$X := V(x+y+z, xyz)(k) \subseteq \mathbb{A}^3(k).$$

   (b) Man bestimme die irreduziblen Komponenten von
   $$Y := V(x^2 - yz, xz - x)(k) \subseteq \mathbb{A}^3(k).$$

   (c) Man bestimme die irreduziblen Komponenten von
   $$Z := V(xz, yz)(k) \subseteq \mathbb{A}^3(k).$$

   (d) Man skizziere die reellen Bilder der algebraischen Mengen X, Y und Z für $k = \mathbb{C}$.

   (e) Man bestimme die Dimension der algebraischen Mengen X, Y und Z und ihrer irreduziblen Komponenten. *(4 Punkte)*

2. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

   (a) Es sei $X = \mathbb{A}^1(k)$ und $U = X \setminus \{0\}$. Man bestimme $\mathcal{O}_X(U)$.

   (b) Es sei $g \in k[x, y]$ ein (irreduzibles) Polynom mit endlich vielen Nullstellen, d.h. $\#V(g)(k)$ sei endlich. Man zeige, dass g eine Einheit in $k[x, y]$ ist.

   (c) Es sei $X = \mathbb{A}^2(k)$ und $U = X \setminus \{(0, 0)\}$. Man bestimme $\mathcal{O}_X(U)$.

   (d) Es sei $X = V(x^3 - y^2)(k) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ und $U = X \setminus \{(0, 0)\}$. Man zeige, dass $\mathcal{O}_X(U) \cong k[t]_t =: k[t, t^{-1}]$ unter dem Homomorphismus $x \mapsto t^2, y \mapsto t^3$. *(4 Punkte)*

3. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine affine Varietät.

   (a) Man zeige, dass jedes Element $f \in \Gamma(X)$ als stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{A}^1(k)$ aufgefasst werden kann. (Wir sprechen hier von Stetigkeit bezüglich der Zariski-Topologie.)

   (b) Man gebe (z.B. für $X = \mathbb{A}^1(k)$) eine stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{A}^1(k)$ an, die nicht von einem Element von $\Gamma(X)$ herkommt. *(4 Punkte)*

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*