

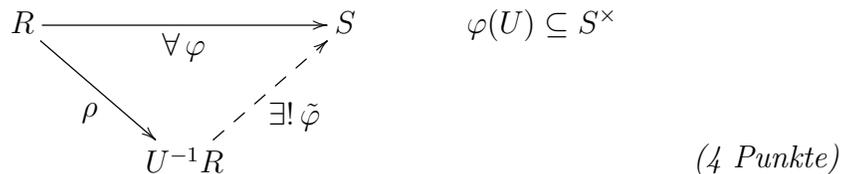
5. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 15.5.15, 8 Uhr

1. Es sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (a) X is irreduzibel.
- (b) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist dicht in X .
- (c) Für zwei nichtleere offene Teilmengen U_1 und U_2 in X ist der Schnitt $U_1 \cap U_2$ nichtleer. (4 Punkte)

2. Es sei R ein Ring, $U \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und ρ bezeichne den kanonischen Homomorphismus $R \rightarrow U^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$. Man zeige, dass es zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi: R \rightarrow S$ mit $\varphi(U) \subseteq S^\times$ (Einheitengruppe) genau einen Homomorphismus $\tilde{\varphi}: U^{-1}R \rightarrow S$ gibt mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \rho$.



3. Es sei R ein Ring, $U \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $\rho: R \rightarrow U^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$ der kanonische Homomorphismus.

- (a) Man zeige, dass die Primideale in R genau die Kerne von Homomorphismen $\varphi: R \rightarrow K$ sind, wobei K ein Körper ist.
- (b) Man zeige, dass die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\{\mathfrak{p} \subseteq R \text{ Primideale mit } \mathfrak{p} \cap U = \emptyset\} \longrightarrow \{\mathfrak{P} \subseteq U^{-1}R \text{ Primideale}\},$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto U^{-1}\mathfrak{p} := \left\{ \frac{a}{b} \in U^{-1}R : a \in \mathfrak{p}, b \in U \right\} = \mathfrak{p} \cdot (U^{-1}R).$$

[Hinweis: Man überlege sich, dass man mithilfe von ρ eine Umkehrabbildung definieren kann.] (4 Punkte)

4. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $R := k[x_1, \dots, x_n]$. Man zeige, dass jedes Radikalideal in R der Durchschnitt endlich vieler Primideale ist. [Hinweis: Man interpretiere diese Aussage geometrisch.] (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? (2 Punkte)