Algebraische Geometrie
SoSe 2015

Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

5. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 15.5.15, 8 Uhr

1. Es sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (a) X is irreduzibel.
   (b) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist dicht in X.
   (c) Für zwei nichtleere offene Teilmengen U_1 und U_2 in X ist der Schnitt $U_1 \cap U_2$ nichtleer. *(4 Punkte)*

2. Es sei R ein Ring, $U \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und ρ bezeichne den kanonischen Homomorphismus $R \to U^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$. Man zeige, dass es zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ mit $\varphi(U) \subseteq S^\times$ (Einheitengruppe) genau einen Homomorphismus $\tilde\varphi\colon U^{-1}R \to S$ gibt mit $\varphi = \tilde\varphi \circ \rho$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\forall\,\varphi"'] \arrow[dr, "\rho"'] & & S \\ & U^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\tilde\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \varphi(U) \subseteq S^\times$$

(4 Punkte)

3. Es sei R ein Ring, $U \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $\rho\colon R \to U^{-1}R$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ der kanonische Homomorphismus.
   (a) Man zeige, dass die Primideale in R genau die Kerne von Homomorphismen $\varphi\colon R \to K$ sind, wobei K ein Körper ist.
   (b) Man zeige, dass die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\{\mathfrak{p} \subseteq R \text{ Primideale mit } \mathfrak{p} \cap U = \emptyset\} \longrightarrow \{\mathfrak{P} \subseteq U^{-1}R \text{ Primideale }\},$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto U^{-1}\mathfrak{p} := \{\tfrac{a}{b} \in U^{-1}R : a \in \mathfrak{p}, b \in U\} \;=\; \mathfrak{p}\cdot(U^{-1}R).$$

   [Hinweis: Man überlege sich, dass man mithilfe von ρ eine Umkehrabbildung definieren kann.] *(4 Punkte)*

4. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $R := k[x_1, \dots, x_n]$. Man zeige, dass jedes Radikalideal in R der Durchschnitt endlich vieler Primideale ist. [Hinweis: Man interpretiere diese Aussage geometrisch.] *(4 Punkte)*

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*