Aufgabe 1

(a) Es gilt nach Prop 1.3.2 die Primideale von $k[X]$ zu finden. Da $k[X]$ Hauptidealring ist, sind das gerade die maximalen Ideale und (0). Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz entsprechen die maximalen Ideale gerade den Punkten in $\mathbb{A}^1(k)$ und das Nullideal entspricht offenbar dem $\mathbb{A}^1(k)$. Demnach sind die irreduziblen abgeschlossen Teilmengen gerade gegeben durch $\{a\}$ mit $a \in k$ und $\mathbb{A}^1(k)$.

(b)

i. Nach Satz von Gauß [Bosch: *Algebra*, Kapitel 2.7 Satz 7] entsprechen die primitiven Primelemente in der Primzerlegung von f (bzw. g) in $k[X, Y]$, genau den Primelementen der Primzerlegung in $k(X)[Y]$. Sind f und g teilerfremd in $k[X, Y]$, so sind sie es demnach auch in $k(X)[Y]$.

ii. Nach 1. sind f und g auch teilerfremd in $k(X)[Y]$. Da dies ein HIR ist, existieren $h_1, h_2 \in k(X)[Y]$ mit $1 = fh_1 + gh_2$ und demnach gibt es ein $0 \neq p \in k[X]$ mit $p = f\tilde{h}_1 + g\tilde{h}_2$ mit $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in k[X, Y]$. Demnach gilt also für $(a, b) \in V(f) \cap V(g)$, dass $p(a) = 0$ sein muss. Daher können nur endlich viele a für $(a, b) \in V(f) \cap V(g)$ in Frage kommen. Analog gilt dies für b.

iii. Sei $f = f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r} \in k[X, Y]$ die Primfaktorzerlegung mit paarweise teilerfremden Primelementen f_i. Demnach gilt

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^{r} V(f_i^{n_i})$$

Ist $V(f)$ nun irreduzibel, so gilt also

$$V(f) = V(f_{i_0}^{n_{i_0}}) = V(f_{i_0}) \text{ für ein } 1 \leq i_0 \leq r.$$

Daraus folgt $Rad(f) = Rad(f_{i_0})$, d.h. $f_{i_0}^m \in (f)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Da $f | f_{i_0}^m$ und $f_i | f$ für alle i folgt, dass $f = f_{i_0}^{n_{i_0}}$ Potenz eines Primpolynoms ist.

iv. $\mathbb{A}^2(k)$ ist irreduzibel. Sei nun $V \subsetneq \mathbb{A}^2(k)$ irreduzibel und $(0) \neq I(V) = (f_1, \ldots, f_n)$. Betrachtet man die Primfaktorzerlegung von $f_1 \in I(V)$ und berücksichtigt, dass $I(V)$ ein Primideal ist nach Prop 1.3.2, so findet man einen Primfaktor g_1 von f_1, der in $I(V)$ liegt. Es folgt $I(V) \subset (g_1, f_2, \ldots, f_n) \subset I(V)$ und wir können oBdA annehmen, dass alle f_i irreduzibel sind. Insbesondere sind je zwei f_i und f_j teilerfremd in $k[X, Y]$ oder sie unterscheiden sich um eine Einheit.
Gibt es mindestens zwei teilerfremde f_i und f_j, so ist $V \subset V(f_i, f_j)(k)$ endlich, also $V = \{P\}$ für einen Punkt P, da V irreduzibel ist. Im anderen Fall ist $I(V) = (f_1)$. Demnach sind die irreduziblen Teilmengen von $\mathbb{A}^2(k)$ gegeben durch

$$\mathbb{A}^2(k), \quad V(f)(k) \text{ mit } f \text{ irreduzibel}, \quad \{P\} \text{ mit } P \in \mathbb{A}^2(k)$$

Aufgabe 2 Sei $V := V(I)(k)$ und $R := k[x_1, \dots, x_n]$.

(a) Wir betrachten den kanonischen Epimorphismus $pr_I : R \to R/I$ und zeigen, dass folgendes eine Bijektion ist.

$$\{J \subset R \mid I \subset J \text{ ist Ideal}\} \to \{\bar{J} \subset R/I \mid \bar{J} \text{ ist Ideal }\},\ J \mapsto J/I = pr_I(J)$$

Das zeigen wir, indem wir zeigen, dass $\bar{J} \mapsto pr_I^{-1}(\bar{J})$ das Inverse ist. Da pr_I surjektiv ist gilt für $\bar{J} \subset R/I$, dass $pr_I(pr_I^{-1}(\bar{J})) = \bar{J}$ ist. Ist umgekehrt $I \subset J \subset R$ ein Ideal, so gilt $pr_I^{-1}(J/I) = J + I = J$. Da $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ nach dem 2. Isomorphiesatz gilt, erhält die Bijektion maximale, Prim- und Radikalideale nach Charakterisierung dieser Idealtypen über ihr Verhalten beim herausfaktorisieren.

(b) Nach (a) und Hilberts Nullstellensatz haben wir folgende Bijektion:

$$\begin{array}{rcl} \{W \subset V \mid W \text{ algebraisch }\} & \longrightarrow & \{\bar{J} \subset R/I \mid \bar{J} \text{ ist Radikalideal }\}, \\ W & \longmapsto & pr_I\big(I(W)\big) = I(W)/I =: I_V(W), \\ V_V(\bar{J})(k) := V\big(pr_I^{-1}(\bar{J})\big)(k) & \longleftarrow & \bar{J}. \end{array}$$

(c) Nach (a) ist $pr_I(I(W))$ ein Primideal genau dann wenn ein $I(W)$ Primideal ist. Nach Prop 1.3.2 also genau dann, wenn W irreduzibel ist.

(d) Analog zu (c).

Aufgabe 3 Für $f = x_1^3 + x_2^3 - x_3^2 - 2x_1x_2x_3 + x_2 + 1$ gilt $deg(f) = 3$ und der homogene Anteil von Grad 3 ist

$$f_3 = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1x_2x_3.$$

Nach Beweis von Lemma 1.2.12 suchen wir a_1, a_2 mit

$$f_3(a_1, a_2, 1) = a_1^3 + a_2^3 - 2a_1a_2 \neq 0.$$

Wähle z.B. $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$. Dann ist $R := k[x_1', x_2'] \subset S/I$ mit $x_i' = x_i - a_ix_3$ endlich, wieder nach Beweis von Lemma 1.2.12. Konkret ist hier $x_1' = x_1 - x_3$ und $x_2' = x_2$ und

$$S/I = R \cdot 1 + R \cdot x_3 + R \cdot x_3^2,$$

da $f = x_3^3 + 3x_1'x_3^3 + 3(x_1')^2x_3 + (x_1')^3 + (x_2')^3 - x_3^2 - 2x_1'x_2'x_3 - 2x_2'x_3^2 + x_2' + 1.$