Algebraische Geometrie
SoSe 2015

Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

4. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 8.5.15, 8 Uhr

1. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.
   (a) Man gebe alle irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{A}^1(k)$ an.
   (b) Man gebe alle irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{A}^2(k)$ an. Es ist hilfreich dabei wie folgt vorzugehen.
      i. Es seien $0 \neq f, g \in k[x, y]$ teilerfremd. Man zeige, dass auch f, g aufgefasst als Elemente von $k(x)[y]$ teilerfremd sind. [Hinweis: Man verwende den Satz von Gauß.]
      ii. Es seien $0 \neq f, g \in k[x, y]$ teilerfremd. Man zeige, dass die Menge $V(f)(k) \cap V(g)(k)$ endlich ist.
      iii. Es sei $0 \neq f \in k[x, y]$ ein Polynom und die Verschwindungsmenge $V(f)(k) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ sei irreduzibel. Welche Gestalt hat das Polynom bezüglich seiner Primfaktorzerlegung in $k[x, y]$?
      iv. Man gebe alle irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{A}^2(k)$ an. *(4 Punkte)*

2. Sei k algebraisch abgeschlossen, $R := k[x_1, \ldots x_n]$, $I \subset R$ ein Ideal und $V := V(I)(k) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$.
   (a) Man zeige, dass es eine Bijektion zwischen der Menge der Ideale von R, die I enthalten, und der Menge der Ideale von R/I gibt. Zudem zeige man, dass diese Bijektion verträglich ist mit maximalen Idealen, Primidealen und Radikalidealen.
   (b) Man gebe eine Bijektion zwischen den algebraischen Teilmengen von V und den Radikal-Idealen von R/I an.
   (c) Man zeige, dass die irreduziblen algebraischen Teilmengen gerade den Primidealen entsprechen.
   (d) Man zeige, dass die einpunktigen Teilmengen gerade den maximalen Idealen entsprechen. *(4 Punkte)*

3. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $S := k[x_1, x_2, x_3]$ der Polynomring und I das von $x_1^3 + x_2^3 - x_3^2 - 2x_1x_2x_3 + x_2 + 1$ erzeugte Ideal. Man gebe einen Unterring der Form $R = k[y_1, \ldots, y_d] \subseteq S/I$ an, sodass die Inklusion $R \subseteq S/I$ endlich ist. [Hinweis: Noether-Normalisierung.] *(4 Punkte)*

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*