Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

3. Übungsblatt

Abgabetermin: Do, 30.4.15, 8 Uhr

1. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

   (a) Es seien I, J Ideale in einem kommutativen Ring R, sodass $I + J = R$ gilt. Man zeige, dass $I \cdot J = I \cap J$ gilt.

   (b) Es seien $P, Q \in \mathbb{A}^n(k)$ zwei verschiedene Punkte. Man zeige, dass gilt $I(\{P\}) \cdot I(\{Q\}) = I(\{P\}) \cap I(\{Q\})$.

   (c) Es seien $P, Q \in \mathbb{A}^2(k)$. Man bestimme Erzeuger des Ideals $I(\{P, Q\})$.

   (4 Punkte)

2. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ seien algebraische Mengen.

   (a) Man zeige, dass $I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$ gilt.

   (b) Man zeige, dass die naive Vermutung $I(V_1 \cap V_2) = I(V_1) + I(V_2)$ falsch ist. [Hinweis: Man betrachte einen geeigneten Schnitt einer Gerade mit einer Parabel im $\mathbb{A}^2(k)$.]

   (c) Man zeige, dass in der Tat $I(V_1 \cap V_2) = \sqrt{I(V_1) + I(V_2)}$ gilt.

   (4 Punkte)

3. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0.

   (a) Es sei die Verschwindungsmenge

   $$V_1 := V(x^2 + y^2 - 1)(k) \cap V(x - y)(k) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$$

   gegeben. Man bestimme das Ideal $I(V_1)$.

   (b) Es sei die Verschwindungsmenge

   $$V_2 := V(x^3 + y^3 + xy)(k) \cap V(3x^2 + y)(k) \cap V(3y^2 + x)(k) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$$

   gegeben. Man bestimme das Ideal $I(V_2)$.

   (4 Punkte)

4. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*