Algebraische Geometrie
SoSe 2015

Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

2. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 24.4.15, 8 Uhr

1. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Es seien $a, b \in k$ mit $a \neq b$. Man bestimme Erzeuger des Verschwindungsideals der Menge $\{(a,0),(b,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$. Man gebe Erzeuger des Verschwindungsideals einer endlichen Teilmenge von $\{(x,0) \mid x \in k\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ an.

   (4 Punkte)

2. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0.

   (a) Es sei $M := \{(m, m, \ldots, m) : m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{A}^n(k)$. Man bestimme Erzeuger des Verschwindungsideals $I(M)$.

   (b) Es sei $M := \{(m, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$. Man bestimme Erzeuger des Verschwindungsideals $I(M)$.

   (4 Punkte)

3. Es sei $\overline{\mathbb{F}}_p$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/(p)$ und $q = p^r$ eine p-Potenz. Sei K ein Körper mit q Elementen.

   (a) Zeigen Sie, dass K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p$ ist und eine Einbettung $\alpha : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ besitzt.

   (b) Bestimmen Sie das Verschwindungsideal von $\alpha(K) \subseteq \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

   (c) Zeigen Sie, dass der Unterkörper $\alpha(K) \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ nicht von α abhängt und es somit bis auf Isomorphie höchstens einen Körper mit q Elementen gibt.

   Solch ein Körper wird daher mit $\mathbb{F}_q$ bezeichnet. *(4 Punkte)*

4. Es sei R ein noetherscher Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Man zeige, dass auch der Quotient R/I noethersch ist.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*