Algebraische Geometrie
SoSe 2015

Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

1. Übungsblatt

Abgabetermin: Fr, 17.4.15, 8 Uhr

1. Es sei k ein Körper, $\iota\colon \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^2(k)$ die Abbildung, die gegeben ist durch $x \mapsto (x, 0)$ und $V \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ eine algebraische Teilmenge. Man zeige, dass das Urbild $\iota^{-1}(V)$ eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^1(k)$ ist.

   (4 Punkte)

2. Es sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^2$. Man gebe an, welche der folgenden Mengen algebraisch sind und begründe seine Aussage.

   (a) $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1\}$
   (b) $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leq 1\}$
   (c) $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| < 1\}$

   (4 Punkte)

3. Man gebe an, welche der folgenden Mengen algebraisch sind und begründe seine Aussage.

   (a) $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
   (b) $\{(x, x^2, x^3) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$
   (c) $\{(x, x^{-1}) : x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

   Man fertige zudem eine (grobe) Skizze der jeweiligen Menge an.

   (4 Punkte)

4. Man gebe ein Polynom f in zwei Variablen an, sodass

   $$V(f)(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : f(x, y) = 0\}$$

   die leere Menge ist und

   $$V(f)(\mathbb{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : f(x, y) = 0\}$$

   unendlich viele Punkte hat.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden? *(2 Punkte)*

Prof. Dr. Urs Hartl
Mark Feldmann

Anwesenheitsaufgaben 1

1. Man zeichne die folgenden algebraischen Mengen.
   (a) $V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$
   (b) $V(X, Y) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$
   (c) $V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

   Ist die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in \{-1, 1\}$ oder $y = x\}$ algebraisch?

2. Es sei k ein Körper. Man überlege sich, welche Teilmengen von $\mathbb{A}^1(k)$ bezüglich der Zariski-Topologie abgeschlossen sind. Welche Teilmengen sind offen?

3. Ein topologischer Raum X heißt *hausdorff*, falls man für je zwei Punkte $x, y \in X$ offene Umgebungen U_x und U_y findet, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$ gilt. Man gebe Beispiele für topologische Räume an, die hausdorff sind. Sind die topologischen Räume $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ und $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ (versehen mit der Zariski-Topologie) hausdorff? Welche Aussage kann man über den $\mathbb{A}^1(k)$ machen, falls k ein beliebiger Körper ist?

4. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt dicht, falls der Abschluss $\overline{M}$ von M bereits X ist. Man gebe ein Beispiel für eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ in der üblichen Topologie an. Welche Teilmengen von $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ und $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ sind dicht bezüglich der Zariski-Topologie?