Bisher Proj A als topol Raum. Jetzt Schema

Def 2.5.9 A graduierter Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A$ (homog Primideal $A_+ \not\subseteq \mathfrak{p}$), $f \in A^{(n)}$

$(A_\mathfrak{p})_0 := \{ s \in A_\mathfrak{p} : \exists d \in \mathbb{N}_0 \ \exists h, g \in A^{(d)}, g \notin \mathfrak{p} \text{ mit } s = \frac{h}{g} \}$

$(A_f)_0 := \{ s \in A_f = A[\frac{1}{f}] : \exists d \in \mathbb{N}_0 \ \exists h, g \in A^{(d)}, g \in \{1, f, f^2, \dots\} \text{ mit } s = \frac{h}{g} \}$

sind Ringe $(g = f^m \Rightarrow d = nm)$

Beispiel 2.5.10 $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ proj alg Menge $I = I_{\mathbb{P}^n}(X)$ homog

$A = k[x_0, \dots, x_n]/I$ grad Ring

$\cup\!|$

$\mathfrak{p} = (a_i x_j - a_j x_i \ \forall i,j) \in \operatorname{Proj} A \mathrel{\hat{=}} P = (a_0 : \dots : a_n) \in V_{\mathbb{P}^n}(I)(k)$

$\frac{h}{g} \in (A_\mathfrak{p})_0 \Rightarrow \frac{h}{g}(P) = \frac{h(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)}{g(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)} = \frac{\cancel{\lambda^d} h(a_0, \dots, a_n)}{\cancel{\lambda^d} g(a_0, \dots, a_n)}$

oder $\in (A_f)_0$, $f \notin \mathfrak{p}$ d.h. $\mathfrak{p} \in D_{\operatorname{Proj} A}(f)$ — unabh von $\lambda \Rightarrow$ wohldef in Abh v. P

Def 2.5.11 Wir definieren die Strukturgarbe auf Proj A: $\forall U \subseteq \operatorname{Proj} A$ offen als

$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}(U) := \{ s : U \to \dot{\bigcup}_{\mathfrak{p} \in U} (A_\mathfrak{p})_0$ so dass

i) $s(\mathfrak{p}) \in (A_\mathfrak{p})_0 \ \forall \mathfrak{p} \in U$ und

ii) $\forall \mathfrak{p} \in U \ \exists V \subseteq U$ offen, $\mathfrak{p} \in V \ \exists d \ \exists f, g \in A^{(d)}$ mit $g \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = \frac{f}{g} \ \forall \mathfrak{q} \in V$ $\}$

Prop 2.5.12 A graduierter Ring, $X = \operatorname{Proj} A$

a) $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}$ ist eine Garbe von Ringen auf Proj A

b) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A$ ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong (A_\mathfrak{p})_0$ ein lokaler Ring

Insbes ist $(\operatorname{Proj} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A})$ ein lok ger Raum

c) $\forall f \in A_+$ homogen ist $(D_{\operatorname{Proj} A}(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}|_{D_{\operatorname{Proj} A}(f)})$ isom zu $\operatorname{Spec} (A_f)_0$ als lok ger Raum

Insbesondere ist $(\operatorname{Proj} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A})$ ein Schema

Beweis: a) $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}A}$ ist Prägarbe (klar) und Garbe wegen der lokalen Eigenschaft ii) vgl L. 2.2.5

b) Die natürl Abb $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}A,\mathfrak{q}} \longrightarrow (A_{\mathfrak{q}})_0$, $[(U, \underset{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}A}(U)}{s})] \mapsto s(\mathfrak{q})$ ist ein wohldef Isom v. Ringe (vgl Prop 2.2.7 a)

$(A_{\mathfrak{q}})_0$ ist lok Ring: einziges max Ideal ist

$$\mathfrak{m} = \{ s \in A_{\mathfrak{q}} : \exists d \in \mathbb{N}_0\ \exists h, g \in A^{(d)},\ g \notin \mathfrak{q}, h \in \mathfrak{q} \text{ mit } s = \tfrac{h}{g} \}$$

denn $\mathfrak{m} \subsetneq (A_{\mathfrak{q}})$ $\left[\frac{1}{1} = \frac{h}{g} \in \mathfrak{m} \Rightarrow \exists f \in A \setminus \mathfrak{q} : fg = fh \in \mathfrak{q} \ \text{↯}\right]$

und $\forall s = \frac{h}{g} \in (A_{\mathfrak{q}})_0 \setminus \mathfrak{m} \Rightarrow h \notin \mathfrak{q} \Rightarrow s^{-1} = \frac{g}{h} \in (A_{\mathfrak{q}})_0$

c) <u>Beh</u>: Die Abb $D_{\mathrm{Proj}A}(f) \longleftrightarrow \mathrm{Spec}\,(A_f)_0$

$\mathfrak{q} \longmapsto \psi(\mathfrak{q}) := (\mathfrak{q} A_f) \cap (A_f)_0$ ist Primideal nach B5, A3 weil $f \notin \mathfrak{q}$

$\varphi(\mathfrak{q}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \varphi(\mathfrak{q})^{(i)} \longleftarrow \mathfrak{q}$

mit $\varphi(\mathfrak{q})^{(i)} := \{ a \in A^{(i)} : \frac{a^{\deg f}}{f^i} \in \mathfrak{q} \}$

sind Isoms von lok. ger. Räumen und invers zueinander

Beweis:

i) φ wohldef
- $0 \in \varphi(\mathfrak{q})$: $0 \in A^{(0)}$, $\deg f > 0 \Rightarrow \frac{0^{\deg f}}{f^0} = \frac{0}{1} \in \mathfrak{q}$
- z.z. $\varphi(\mathfrak{q})$ ist Primideal

homogener Fall: $g \in A^{(i)}$, $h \in A^{(j)}$, $g \cdot h \in \varphi(\mathfrak{q})$, d.h. $\frac{(gh)^{\deg f}}{f^{i+j}} \in \mathfrak{q}$

$\Rightarrow \frac{g^{\deg f}}{f^i} \in \mathfrak{q}$ oder $\frac{h^{\deg f}}{f^j} \in \mathfrak{q} \Rightarrow g \in \varphi(\mathfrak{q})$ oder $h \in \varphi(\mathfrak{q})$

inhomogener Fall: $g = \sum_i g^{(i)}$, $h = \sum_i h^{(i)}$, $g^{(i)}, h^{(i)} \in A^{(i)}$

Sei $g \cdot h \in \varphi(\mathfrak{q})$ z.z. $g \in \varphi(\mathfrak{q})$ oder $h \in \varphi(\mathfrak{q})$

Annahme $g, h \notin \varphi(\mathfrak{q}) \Rightarrow \exists$ minimales i_0, j_0 mit $g^{(i_0)}, h^{(j_0)} \notin \varphi(\mathfrak{q})$

$$\Rightarrow (gh)^{(i_0+j_0)} = \sum_{i=0}^{i_0+j_0} \underbrace{g^{(i)} h^{(i_0+j_0-i)}}_{\in \varphi(\mathfrak{q})?} \in \varphi(\mathfrak{q}) \text{ weil homog Ideal}$$

$i < i_0 \Rightarrow \in \varphi(\mathfrak{q})$

$i > i_0 \Rightarrow i_0 + j_0 - i < j_0$

$\Rightarrow g^{(i_0)} h^{(j_0)} \in \varphi(\mathfrak{q}) \Rightarrow$ ↯ zum homog Fall

- $\varphi(\mathfrak{q})$ ist von den homog Elementen in allen $\varphi(\mathfrak{q})^{(i)}$ erzeugt $\Rightarrow \varphi(\mathfrak{q})$ ist homogen
- $f \notin \varphi(\mathfrak{q})$, denn sonst wäre $f \in \varphi(\mathfrak{q})^{(\deg f)} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{f^{\deg f}}{f^{\deg f}} \in \mathfrak{q}$ ↯
- $A_+ \not\subseteq \varphi(\mathfrak{q})$, denn $f \in A_+$, $f \notin \varphi(\mathfrak{q})$

ii) $\varphi(\psi(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$

„$\subseteq$" Sei $a \in \varphi(\psi(\mathfrak{q}))^{(i)}$, d.h. $\frac{a^{\deg f}}{f^i} \in \psi(\mathfrak{q}) \subseteq \underbrace{\mathfrak{q} \cdot A_f}_{\{\frac{g}{f^m} : g \in \mathfrak{q}, m \in \mathbb{N}_0\}} \subseteq A_f$

$\Rightarrow \exists r : f^r \cdot (a^{\deg f} \cdot f^m - g \cdot f^i) = 0$ in A

$\Rightarrow f^{r+m} \cdot a^{\deg f} \in \mathfrak{q} \Rightarrow a \in \mathfrak{q}$ Also $\varphi(\psi(\mathfrak{q})) \subseteq \mathfrak{q}$

„$\supseteq$" Sei $a \in \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ homogen $\Rightarrow$ OBdA a homogen $\in A^{(i)}$

$\xRightarrow{\deg f \geq 1} \frac{a^{\deg f}}{f^i} \in \mathfrak{q} \cdot A_f \cap (A_f)_0 = \psi(\mathfrak{q}) \Rightarrow a \in \varphi(\psi(\mathfrak{q}))^{(i)}$

iii) $\mathfrak{p} = \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$

„$\subseteq$" Sei $\frac{a}{f^m} \in \mathfrak{p} \subseteq (A_f)_0$, d.h. $a \in A^{(m \cdot \deg f)}$

$\xrightarrow[\deg f \geq 1]{} \frac{a^{\deg f}}{f^{m \cdot \deg f}} \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \varphi(\mathfrak{p}) \Rightarrow \frac{a}{f^m} \in \overbrace{\varphi(\mathfrak{p}) \cdot A_f \cap (A_f)_0}^{= \psi(\varphi(\mathfrak{p}))}$

„$\supseteq$" Sei $\frac{a}{f^m} \in \psi(\varphi(\mathfrak{p})) \subseteq (A_f)_0$, d.h. $a \in A^{(m \cdot \deg f)}$

$\psi(\varphi(\mathfrak{p})) \subseteq \varphi(\mathfrak{p}) \cdot A_f$

$\Rightarrow a \in \varphi(\mathfrak{p}) \Rightarrow \frac{a^{\deg f}}{f^{m \cdot \deg f}} \in \mathfrak{p}$ Primid $\Rightarrow \frac{a}{f^m} \in \mathfrak{p}$

iv) ψ stetig: Sei $\rho : A \longrightarrow A_f$, $a \longmapsto \frac{a}{1}$

Sei $J \subseteq (A_f)_0$ ein Ideal und $I := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \{a \in A^{(i)} : \rho(a) \in J \cdot A_f\}$

$\psi^{-1}(V_{(A_f)_0}(J)) = \{\mathfrak{q} \in D_{\mathrm{Proj}\,A}(f) : \underline{J \subseteq \psi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cdot A_f \cap (A_f)_0}\}$

$\Leftarrow I \subseteq \rho^{-1}(\mathfrak{q} \cdot A_f) = \mathfrak{q} \Leftarrow J \cdot A_f \subseteq \mathfrak{q} \cdot A_f \Leftrightarrow$

$\| $

$V_{\mathrm{Proj}\,A}(I) \cap D_{\mathrm{Proj}\,A}(f)$ abg

v) φ stetig: Sei $D_{\mathrm{Proj}\,A}(g) \subseteq D_{\mathrm{Proj}\,A}(f)$ für $g \in A_+$ homog

(Jede offene Menge in $D_{\mathrm{Proj}\,A}(f)$ ist Vereinigung von solchen)

$\varphi^{-1}(D_{\mathrm{Proj}\,A}(g)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_f)_0 : \underline{g \notin \varphi(\mathfrak{p})}\}$

$\Updownarrow$

$= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_f)_0 : \frac{g^{\deg f}}{f^{\deg g}} \notin \mathfrak{p}\} = \underbrace{D_{\mathrm{Spec}(A_f)_0}\left(\frac{g^{\deg f}}{f^{\deg g}}\right)}_{\text{offen}}$

vi) $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f)_0, \psi(\mathfrak{p})} = \left((A_f)_0 \setminus \psi(\mathfrak{p})\right)^{-1} (A_f)_0$

$$= \left\{ \frac{\frac{h}{f^r}}{\frac{g}{f^s}} : h \in A^{(r \deg f)}, g \in A^{(s \deg f)}, \underbrace{\frac{g}{f^s} \notin \psi(\mathfrak{p})}_{\Leftrightarrow\, g \notin \mathfrak{p}} \right\}$$

$$\Big\downarrow \qquad \cong \Big\downarrow$$

$$\frac{h \cdot f^s}{g \cdot f^r} \in (A_{\mathfrak{p}})_0 = \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A, \mathfrak{p}}$$

surjektiv: $(A_{\mathfrak{p}})_0 = \left\{ \frac{h}{g} \,\middle|\, \exists d : h, g \in A^{(d)}, h \notin \mathfrak{p} \right\}$

$$\frac{h}{g} = \frac{h \cdot g^{(\deg f)-1} \cdot f^d}{g^{\deg f} \cdot f^d} \longmapsto \frac{(h \cdot g^{(\deg f)-1})/f^d}{g^{\deg f}/f^d}$$

injektiv: $\frac{h \cdot f^s}{g \cdot f^r} = \frac{0}{1}$ in $(A_{\mathfrak{p}})_0 \Rightarrow$ in $A_{\mathfrak{p}}$

$\Rightarrow \exists\, b \in A \setminus \mathfrak{p} \quad b \cdot h \cdot f^s = 0$ in A

$b = \sum_i b^{(i)} \Rightarrow 0 = \sum_i \underbrace{b^{(i)} \cdot h \cdot f^s}_{\in A^{(i + \deg h + s \deg f)}} \Rightarrow b^{(i)} \cdot h \cdot f^s = 0 \;\forall i$.

und mind ein $b^{(i)} \notin \mathfrak{p}$

$\Rightarrow \frac{f^s \cdot (b^{(i)})^{\deg f}}{f^{s+i}} \in (A_f)_0 \setminus \psi(\mathfrak{p})$ und $\frac{f^s \cdot (b^{(i)})^{\deg f}}{f^{s+i}} \cdot \frac{h}{f^r} = \frac{0}{f^{s+i+r}} = 0$

$\Rightarrow \frac{h/f^r}{g/f^s} = 0$ in $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f)_0, \psi(\mathfrak{p})}$

vii) Es folgt, dass $\forall\, \mathcal{U} \subseteq D_{\operatorname{Proj} A}(f)$ offen gilt

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} A}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f)_0}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$$

$$\left\{ s : \mathcal{U} \to \bigodot_{\mathfrak{p} \in \mathcal{U}} (A_{\mathfrak{p}})_0 \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \tilde{s} : \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \to \bigodot_{\mathfrak{q} \in \varphi^{-1}(\mathcal{U})} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f)_0, \mathfrak{q}} \right\}$$

$\mathfrak{p} := \varphi(\mathfrak{q}) \in \mathcal{U}, \mathfrak{q} = \psi(\mathfrak{p})$

Somit sind φ und ψ Isom von lok ger Räumen

Fazit: $\forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A$, d.h. $A_+ \not\subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \exists\, f \in A_+, f \notin \mathfrak{p}$

$f = \sum_{i=0}^{<\infty} f^{(i)}, f^{(i)} \in A^{(i)}, f^{(0)} = 0 \Rightarrow \exists\, i : f^{(i)} \notin \mathfrak{p} \Rightarrow i > 0 \Rightarrow \mathfrak{p} \in \underbrace{D_{\operatorname{Proj} A}(f^{(i)})}_{\cong \operatorname{Spec}(A_{f^{(i)}})_0}$

$\Rightarrow \operatorname{Proj} A$ ist ein Schema $\square$