Prof. Dr. Urs Hartl
WiSe 10/11

Lineare Algebra I – Zusammenfassung

1 Vektorräume

1.1 Mengen und Abbildungen

injektive, surjektive, bijektive Abbildungen

1.2 Gruppen

1.3 Körper

1.4 Vektorräume

Definition 1.4.1. Sei K ein Körper. Ein K-*Vektorraum* besteht aus

- einer Menge V und zwei Abbildungen
- $V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w \quad$ (genannt *Addition*),
- $K \times V \to V, \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v \quad$ (genannt *skalare Multiplikation*)

so dass gilt

(V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
(V2) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ für alle $\alpha, \beta \in K, v \in V$,
(V3) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ für alle $\alpha \in K, v, w \in V$,
(V4) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$ für alle $\alpha, \beta \in K, v \in V$,
(V5) $1 \cdot v = v$ für alle $v \in V$ und das Einselement $1 \in K$.

Definition 1.4.2. Ein *Vektor* ist ein Element eines Vektorraums.

Definition 1.4.12. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *Erzeugendensystem von* V, falls jeder Vektor $v \in V$ eine *Linearkombination*

$$v = \alpha_{i_1} v_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_n} v_{i_n} \qquad \text{mit } \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n} \in K$$

gewisser endlich vieler $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ ist, deren Auswahl von v abhängt.

V heißt *endlich erzeugt*, falls V ein endliches Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$ besitzt.

1.5 Lineare Unabhängigkeit und Basen von Vektorräumen

Definition 1.5.4. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *linear unabhängig*, falls aus jeder Gleichung

$$\sum_{i \in J} \alpha_i v_i = 0$$

mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$ für eine endlich Teilmenge $J \subset I$ stets $\alpha_i = 0$ für alle $i \in J$ folgt.

Definition 1.5.5. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *Basis von* V, falls

- $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist und
- $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

Satz 1.5.7. Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Familie von Vektoren $v_i \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.
2. Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

Satz 1.5.8. Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum besitzt eine Basis.

Korollar 1.5.12. In einem endlich erzeugten K-Vektorraum besteht jede Basis aus gleich vielen Vektoren.

Definition 1.5.13. Sei V ein K-Vektorraum.

1. Ist V endlich erzeugt mit einer Basis bestehend aus n Vektoren, so sagen wir V hat *Dimension* n.
2. Ist V nicht endlich erzeugt, so sagen wir V hat *Dimension* ∞.

1.6 Summen von Vektorräumen

Summen und direkte Summen von Vektorräumen

Satz 1.6.5. (*Dimensionsformel für Unterverktorräume*)
Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 endlich dimensionale K-Untervektorräume von V. Dann gilt

$$\dim_K(U_1 + U_2) + \dim_K(U_1 \cap U_2) \;=\; \dim_K U_1 + \dim_K U_2 \,.$$

2 Lineare Abbildungen

2.1 Grundbegriffe

Definition 2.1.1. Eine Abbildung $f : V \to V'$ zwischen zwei K-Vektorräumen V und V' heißt *K-linear*, oder *K-Homomorphismus*, falls für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha \in K$ gilt:

1. $f(v+w) \;=\; f(v) + f(w)$ und
2. $f(\alpha v) \;=\; \alpha f(v)$.

weitere Begriffe: *Isomorphismus, Monomorphismus, Epimorphismus, Endomorphismus, Automorphismus*

Satz 2.1.4. Sei V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension n, dann ist V isomorph zu K^n.

Definition 2.1.7. Ist $f : V \to V'$ ein K-Homomorphismus zwischen K-Vektorräumen V und V', so definieren wir den *Kern von* f als den K-Untervektorraum von V

$$\ker f \;:=\; f^{-1}\big(\{0\}\big) \;=\; \{\, v \in V : f(v) = 0 \,\}$$

und wir definieren das *Bild von* f als den K-Untervektorraum von V'

$$\operatorname{im} f \;:=\; f(V) \;=\; \{\, v' \in V' : \exists v \in V \text{ mit } v' = f(v) \,\}\,.$$

Satz 2.1.8. Sei $f : V \to V'$ ein K-Homomorphismus zwischen K-Vektorräumen V und V', so ist f injektiv genau dann, wenn $\ker f = \{0\}$.

Korollar 2.1.11. Sind zwei K-Vektorräume V und V' isomorph, dann gilt $\dim_K V = \dim_K V'$.

Satz 2.1.12. Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Sei V' ein K-Vektorraum und seien $v'_1, \dots, v'_n$ Vektoren aus V'. Dann gibt es genau einen K-Homomorphismus $f : V \to V'$ mit $f(v_i) = v'_i$ für alle i.
Wir sagen „Homomorphismen sind durch die Bilder einer Basis eindeutig bestimmt.“

Satz 2.1.14. (*Dimensionsformel für Homomorphismen*)
Sei $f : V \to V'$ ein K-Homomorphismus zwischen K-Vektorräumen V und V'. Dann gilt

$$\dim_K V \;=\; \dim_K(\ker f) + \dim_K(\operatorname{im} f)\,.$$

2.2 Faktorräume

affine Unterräume

Definition 2.2.7.

1. Eine *Relation* auf einer Menge M besteht aus einer Teilmenge $R \subset M \times M$. Man schreibt $a \sim b$, falls $(a, b) \in R$ und spricht von der Relation „$\sim$“.

2. Eine Relation „$\sim$“ auf einer Menge M heißt eine *Äquivalenzrelation*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(R)	*Reflexivität:*	$a \sim a$	für alle $a \in M$
(S)	*Symmetrie:*	$a \sim b \implies b \sim a$	für alle $a, b \in M$
(T)	*Transitivität:*	$a \sim b\,,\; b \sim c \implies a \sim c$	für alle $a, b, c \in M$

Definition 2.2.8. Ist „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M und $a \in M$, so heißt

$$[a] \;:=\; \{\, b \in M : a \sim b \,\}$$

die *Äquivalenzklasse von a*. Jedes Element $b \in [a]$ heißt ein *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[a]$. Die Menge aller Äquivalenzklassen ist $M/\!\sim\; := \{\, [a] : a \in M \,\}$.

Definition 2.2.12. Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein K-Untervektorraum. Die Äquivalenzrelation auf V

$$v \sim w \;:\Longleftrightarrow\; v - w \in U \qquad (\text{für } v, w \in V)$$

heißt *Kongruenzrelation modulo U*. Die Äquivalenzklassen von „$\sim$“ heißen *Kongruenzklassen modulo U* oder *Restklassen modulo U*. Der K-Vektorraum $V/U := V/\!\sim$ heißt der *Faktorraum von V modulo U*. Wir bezeichnen die Kongruenzklasse von v modulo U mit $\bar{v} \in V/U$.

Satz 2.2.13. Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein K-Untervektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\pi : V \to V/U\,, \quad v \mapsto \bar{v}$$

ein Epimorphismus von K-Vektorräumen mit $\ker \pi = U$. Er wird *der kanonische Epimorphismus* genannt.

Satz 2.2.14. (*Homomorphiesatz*)
Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein K-Untervektorraum, sowie $\pi : V \to V/U$ der kanonische Epimorphismus. Dann erfüllt V/U zusammen mit π die folgende *universelle Eigenschaft*:

Ist $f : V \to V'$ ein K-Homomorphismus zu einem K-Vektorraum V' mit $U \subset \ker f$, so existiert ein eindeutig bestimmter K-Homomorphismus $\bar{f} : V/U \to V'$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$, d.h. so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & V/U \arrow[dl, dashed, "\exists!\bar{f}"] \\
U \subset \ker f & V' &
\end{tikzcd}$$

Ferner ist $\bar{f}$ injektiv $\Longleftrightarrow \ker f = U$ und $\bar{f}$ surjektiv $\Longleftrightarrow f$ surjektiv.

2.3 Der Dualraum

Definition 2.3.1. Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt der K-Vektorraum

$$V^* \;:=\; \mathrm{Hom}_K(V, K) \;=\; \{\, K\text{-Homomorphismen } f : V \to K \,\}$$

der *Dualraum zu V*. Die Elemente von V^* heißen *Linearformen auf V*.

3 Matrizen

3.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

Definition von Matrizen,
zu einem Vektor v gehörender Koordinatenvektor ${}_{\mathcal{B}}[v]$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$,
zu einer linearen Abbildung f gehörende Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ bezüglich Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$,
Matrizenprodukt, Rechenregeln für Matrizen, Transponieren von Matrizen

Satz 3.1.3. Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W. Dann ist die Abbildung

$$ {}_{\mathcal{C}}[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}} : \ \mathrm{Hom}_K(V, W) \ \longrightarrow \ K^{m\times n}, \quad f \ \mapsto \ {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} $$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Satz 3.1.5. Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W und sei $f : V \to W$ ein K-Homomorphismus. Dann gilt für alle $v \in V$

$$ {}_{\mathcal{C}}[f(v)] \ = \ {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v]\,. $$

Satz 3.1.8. Seien U, V, W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}$ von U, $\mathcal{C}$ von V und $\mathcal{D}$ von W und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ zwei K-Homomorphismen. Dann gilt

$$ {}_{\mathcal{D}}[g \circ f]_{\mathcal{B}} \ = \ {}_{\mathcal{D}}[g]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\,. $$

3.2 Das Gaußsche Eliminationsverfahren und der Rang einer Matrix

Definition 3.2.1. Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann ist der *Spaltenrang von A* die Dimension des von den Spalten von A erzeugten K-Untervektorraums von K^m. Der *Zeilenrang von A* ist die Dimension des von den Zeilen von A erzeugten K-Untervektorraums von $K^{(n)}$.

Satz 3.2.3. Ist $A \in K^{m\times n}$, so ist der Zeilenrang von A gleich dem Spaltenrang von A. Der gemeinsame Wert heißt der *Rang von A*.

3.3 Matrizenringe und invertierbare Matrizen

Definition von Ringen, Einheitengruppe eines Rings, $\mathrm{GL}_n(K)$

Satz 3.3.9. Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist invertierbar, d.h. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.
2. Es gibt ein $B \in K^{n\times n}$ mit $B \cdot A = \mathrm{Id}_n$.
3. Die Spalten von A sind linear unabhängig als Vektoren im K^n.
4. Es gibt ein $C \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot C = \mathrm{Id}_n$.
5. Die Zeilen von A sind linear unabhängig als Vektoren im $K^{(n)}$.
6. Der Rang von A ist n.

Gelten diese Aussagen, so ist $B = C = A^{-1}$ eindeutig bestimmt.

Korollar 3.3.12. Jede invertierbare Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen.

3.4 Basiswechsel

Satz 3.4.1. Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von W, sowie $f : V \to W$ ein K-Homomorphismus. Dann ist

$$ {}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} \;=\; S^{-1} \cdot {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot T $$

für die Basiswechselmatrizen $S = {}_{\mathcal{C}}[\,\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}'}$ und $T = {}_{\mathcal{B}}[\,\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}$.

Satz 3.4.3. Sei $A \in K^{n\times n}$ vom Rang r. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$ S \cdot A \cdot T \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . $$

3.5 Lineare Gleichungssysteme

Definition 3.5.1. Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m, j=1\ldots n} \in K^{m\times n}$ und einen Vektor $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in K^m$ nennt man

$$ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} $$

oder kurz $Ax = b$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ein *lineares Gleichungssystem.*

Satz 3.5.4. Sei $A \in K^{m\times n}, b \in K^m$, sowie $v \in K^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Dann gilt

$$ \{x \in K^n : Ax = b\} \;=\; v + \{x \in K^n : Ax = 0\} \;=\; v + \ker f_A \,. $$

4 Determinanten

4.1 Permutationen

Definition 4.1.1. Sein $n \in \mathbb{N}$ und $X = \{1, \dots, n\}$. Die *symmetrische Gruppe* oder *Permutationsgruppe auf* n *Elementen* ist die Gruppe

$$S_n \;:=\; \{\, \sigma : X \to X \text{ bijektive Abbildung } \}\,.$$

Die Elemente von S_n heißen *Permutationen.*

Definition 4.1.6. Sei $\sigma \in S_n$. Dann heißt

$$\operatorname{sgn} \sigma \;:=\; \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

das *Signum von* σ.

4.2 Determinantenfunktionen

Definition 4.2.1. Sei V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension n. Eine *Determinantenfunktion auf* V ist eine multilineare, alternierende Abbildung $\Delta : V^n \to K$.

Satz 4.2.4. (*Formel von Leibniz*)
Für Matrizen $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ definiere man die *Determinante von* A durch

$$\det A \;:=\; \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \quad \in K\,.$$

Dann ist det aufgefasst als Funktion in den Spalten von A eine Determinantenfunktion auf $V = K^n$. Sie erfüllt $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$.

Satz 4.2.8. Sei $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis des K-Vektorraums V. So ist

$$\det_{\mathcal{B}} :\; V^n \to K\,, \quad \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \;:=\; \det\Big({}_{\mathcal{B}}[v_1], \dots, {}_{\mathcal{B}}[v_n]\Big)$$

eine Determinantenfunktion auf V mit $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 1$. Für jede andere Determinantenfunktion Δ auf V gibt es eine eindeutig bestimmte Konstante $\alpha \in K$ mit $\Delta = \alpha \cdot \det_{\mathcal{B}}$.

4.3 Determinanten von Endomorphismen und Matrizen

Proposition 4.3.1. Sei Δ eine nicht-triviale Determinantenfunktion auf einem n-dimensionalen K-Vektorraum V. Ferner sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Dann gilt:

1. Durch $\Delta_f : V^n \to K\,,\ \Delta_f(v_1, \dots, v_n) \;:=\; \Delta\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big)$ wird auf V eine Determinantenfuktion definiert.
2. Es existiert ein eindeutig bestimmtes $\alpha_f \in K$ mit $\Delta_f = \alpha_f \cdot \Delta$.
3. Ist $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V, so gilt $\;\alpha_f \;=\; \det {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$.

Definition 4.3.2. $\det f \;:=\; \alpha_f$ heißt die *Determinante des Endomorphismus* f.

Satz 4.3.4. Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

3. $\det(A \cdot B) \;=\; (\det A)(\det B)\,.$
4. $\det A \neq 0$ genau dann, wenn $A \in \mathrm{GL}_n(K)\,.$
6. $\det A^T \;=\; \det A$ für die transponierte Matrix A^T.

Satz 4.3.6. Sei $A \in K^{n\times n}$ und $\alpha \in K$. Dann ändert sich $\det A$ unter elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen wie folgt:

Typ I: $\det A$ multipliziert sich mit α, wenn man eine Zeile (bzw. Spalte) von A mit α multipliziert.

Typ II: $\det A$ ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (bzw. Spalte) von A das α-fache einer anderen Zeile (bzw. Spalte) von A addiert.

Typ III: $\det A$ ändert das Vorzeichen, wenn man in A zwei Zeilen (bzw. Spalten) vertauscht.

4.4 Die Cramersche Regel

Definition 4.4.2. Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ und ein Indexpaar $i, j \in \{1, \dots, n\}$ betrachten wir die Unter-Matrix $A'_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$, die aus A entsteht durch Weglassen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Wir definieren

$$\widetilde{a}_{ij} \;:=\; (-1)^{i+j} \det A'_{ij} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{A} \;:=\; (\widetilde{a}_{ij})_{i=1\dots n,\, j=1\dots n} \;\in K^{n\times n}\,.$$

Dann heißt $A^{\mathrm{ad}} := \widetilde{A}^T$ die *zu A gehörende Komplementärmatrix.*

Korollar 4.4.4. (*Laplacescher Entwicklungssatz*)
Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\det A \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A'_{ik} \qquad \textit{Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile}$$

$$\det A \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A'_{kj} \qquad \textit{Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte}$$

Korollar 4.4.5. Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt $A^{-1} \;=\; (\det A)^{-1}\, A^{\mathrm{ad}}$.