Aufgabe 6.4 K Körper, V K-VR mit $\dim_K V < \infty$.

(i) Beh. Für jedes $n \geq 1$ gilt: Für jede Familie von UVR $U_1, \ldots, U_n \subset V$ ist $\sum_{i=1}^{n} \dim_K U_i = \dim_K\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \dim_K\left(\left(\sum_{j=1}^{i} U_j\right) \cap U_{i+1}\right)$

Begr. Durch Induktion nach n.

$\left(n=1: \dim_K U_1 = \dim_K U_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{0} (\ldots)}_{=0 \text{ (leere } \Sigma)}\right)$

$n=2$: $\dim_K U_1 + \dim_K U_2 = \dim_K(U_1+U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$ ✓ (Dim. formel)

Sei Beh. wahr für ein $n \geq 1$ (dh. für jede Familie von n UVR sei die Formel richtig).

Seien $U_1, \ldots, U_{n+1} \subset V$ UVR. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} \dim_K U_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \dim_K U_i}_{\text{I.V. anwenden}} + \dim_K U_{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \dim_K\left(\left(\sum_{j=1}^{i} U_j\right) \cap U_{i+1}\right) + \overbrace{\dim_K\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) + \dim_K U_{n+1}}^{\text{Dim.formel für } U_{n+1} \text{ und } \sum_{i=1}^{n} U_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \dim_K\left(\left(\sum_{j=1}^{i} U_j\right) \cap U_{i+1}\right) + \dim_K\underbrace{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) + U_{n+1}\right)}_{=\sum_{i=1}^{n+1} U_i} + \dim_K\left(\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) \cap U_{n+1}\right)$$

$$\underset{\text{umsortieren}}{=} \dim_K\left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \dim_K\left(\left(\sum_{j=1}^{i} U_j\right) \cap U_{i+1}\right)$$

(ii) Seien UVR $U_1, \ldots, U_n \subset V$ gegeben.

Beh. $\underbrace{V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n}_{\text{dh. } V = U_1 + \ldots + U_n \text{ und Summe direkt}} \iff V = U_1 + \ldots + U_n$ und für $i = 1, \ldots, n-1$ gilt $(U_1 + \ldots + U_i) \cap U_{i+1} = \underbrace{0}_{:=\{0\}}$

Begr.: „$\Longrightarrow$" Sei $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Es gilt $U_1 + \ldots + U_i \subset U_1 + \ldots + U_i + U_{i+2} + \ldots + U_n$

($\triangle$ $U_1 + \ldots + U_i + U_{i+2} + \ldots + U_n = U_1 + \ldots + U_{n-1}$ für $i = n-1$)

$\Longrightarrow (U_1 + \ldots + U_i) \cap U_{i+1} \subset (U_1 + \ldots + U_i + U_{i+2} + \ldots + U_n) \cap U_{i+1} = 0$ nach Vor (ΣU_j dir.)

„$\Longleftarrow$" Sei $0 = u_1 + \ldots + u_n$ mit $u_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

$\Longrightarrow \underbrace{-u_n}_{\in U_n} = \underbrace{u_1 + \ldots + u_{n-1}}_{\in U_1 + \ldots + U_{n-1}}$, $\underset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow}$ beide Seiten dieser Gleichung sind $=0$,

$\Longrightarrow u_n = 0$ und $\underbrace{u_1 + \ldots + u_{n-1} = 0}_{(*)}$. Verfahre mit $(*)$ genauso und zeige so nacheinander $0 = u_{n-1} = u_{n-2} = \ldots = u_1$

$\Longrightarrow$ die Summe der $U_1, \ldots, U_n$ ist direkt.

$\square$