4. Determinanten

Motivation / Lineare Gleichungssysteme

Sei $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in K^{2\times 2}$ $\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\in K^2$

LGS $Ax=b$

Falls A invertierbar, d.h. $\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{pmatrix}$ lin unabh.,
so existiert eindeutige Lösung, nämlich etwa $a_{11}\neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\end{array}\right) \overset{R_2(+a_{11})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1\\ +a_{11}a_{21} & +a_{11}a_{22} & +a_{11}b_2\end{array}\right)$$

$$\overset{S_{12}(-a_{21})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1\\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}b_2-a_{21}b_1\end{array}\right)$$

Nun $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \iff \operatorname{rg} A<2$, d.h. A nicht invertierbar

Def. $\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ heißt Determinante von A

Ist A invertierbar $\Rightarrow$ $x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \dfrac{\det\begin{pmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}$

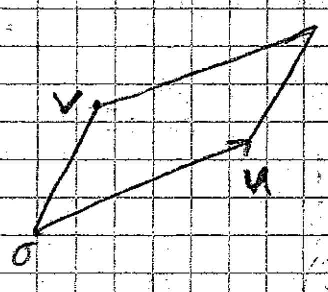
$$x_1=\frac{1}{a_{11}}\left(b_1-a_{12}x_2\right)=\frac{1}{\cancel{a_{11}}}\cdot\frac{\cancel{a_{11}}b_1a_{22}-\cancel{a_{12}a_{21}b_1}-\cancel{a_{11}}b_2a_{12}+\cancel{a_{12}a_{21}b_1}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\det\begin{pmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}$$

Analoge Rechnung für $a_{12}\neq 0$, $a_{21}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$ führt zum gleichen Ergebnis

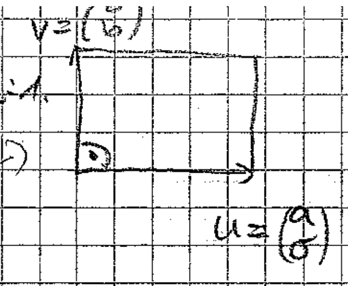
auptprinzip Intuition $\rightarrow$

Flächen- und Volumenmessung



Fläche $=: \operatorname{Vol}(u,v)$

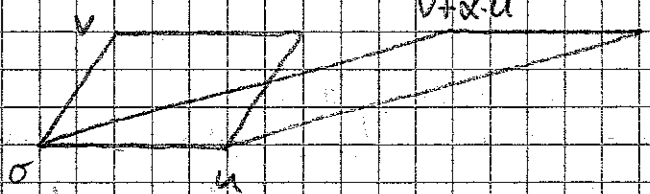
Bsp: 1.



$\Rightarrow \mathrm{Vol}(u,v) = \mathrm{Vol}\left(\binom{a}{0}, \binom{0}{b}\right) = a \cdot b$

FRAGE

2.



$\mathrm{Vol}(u,v) = \mathrm{Vol}(u, v+\alpha u)$
$= \mathrm{Vol}(u+\alpha v, v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

3.

(u,v) lin abh $\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(u,v) = 0$

allgemein $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Vol}(u,v) = ?$ Etwa $u_1 \neq 0$

$\mathrm{Vol}(u,v) = \mathrm{Vol}\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ u_2 & v_2 - \frac{v_1}{u_1} u_2 \end{pmatrix}$ Addiere $\left(-\frac{v_1}{u_1}\right) \cdot u$ zu v

$\mathrm{Vol}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$

Nun $\det \neq 0$, d.h. $v_2 - \frac{v_1}{u_1} u_2 \neq 0$

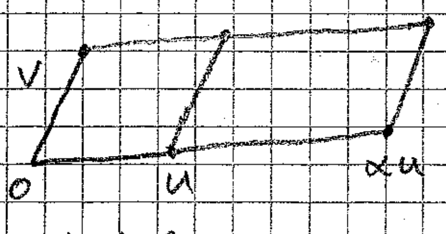
$\Rightarrow \mathrm{Vol}(u,v) = \mathrm{Vol}\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_2 - \frac{v_1}{u_1} u_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2$

Insgesamt $\mathrm{Vol}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

Ebenso, falls $u_2 \neq 0$, $v_1 \neq 0$ oder $v_2 \neq 0$

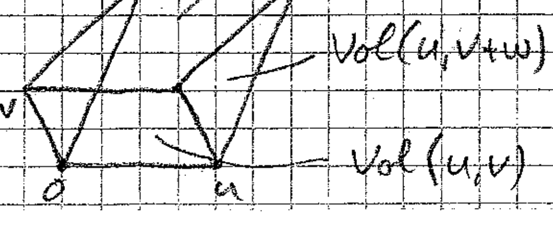
Weitere Eigenschaften

- $\det(\alpha u, v) = \alpha \cdot \det(u,v) = \det(u, \alpha v) \quad \alpha \in \mathbb{R}$



$\mathrm{Vol}(\alpha u, v) = \alpha \cdot \mathrm{Vol}(u,v)$

- $\det(u, v+w)$
$= \det(u,v) + \det(u,w)$



Dimension ≥ 3

Zwei Möglichkeiten zur Definition der Determinante einer $n \times n$-Matrix

1. durch explizite Formel (G.W. Leibniz 1693)
2. durch gewünschte Eigenschaften (K. Weierstraß)

$\det : K^{n \times n} \to K$, $A \mapsto \det A$ soll erfüllen

- $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ ist det <u>linear in der j-ten Spalte</u>, d.

$$\det(\underbrace{s_1, \dots, \alpha s_j + \beta s_j', \dots, s_n}_{\text{Spalten-Vektoren}}) = \alpha \det(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n) + \beta \det(s_1, \dots, s_j', \dots, s_n)$$

- hat A <u>zwei gleiche Spalten</u>, so ist $\det A = 0$,
- $\det \mathrm{Id}_n = 1$, man sagt det ist <u>normiert</u>

Bsp: $n = 3$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + \;\; + & + \end{array}$$

Explizite Formel erfüllt die Axiome von Weierstraß

„Schwierigkeit": das richtige Vorzeichen (+ oder −) zu wissen, je nach Anordnung der Indizes

$\boxed{\text{Foto: Weierstraß}}$

Beachte: $a_{12} a_{23} a_{31}$ etc.

Erste Indizes: 1 2 3 Zweite Indizes: auch nur in vertauschter Reihenfolge

4.1 Permutationen

In diesem Abschnitt: Sei $n \in \mathbb{N}$, $X = \{1, 2, \dots, n\}$

Def 4.1.1

Die <u>symmetrische Gruppe</u> oder <u>Permutationsgruppe auf n Elementen</u> S_n ist die Gruppe $\mathrm{Bij}(X)$ der bijektiven Abb $\sigma : X \to X$

Die Elemente von S_n heißen <u>Permutationen</u>
(sie vertauschen die Reihenfolge der Zahlen $1, \dots, n$)

Ist $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(i) = a_i$ für $i = 1, \dots, n$, so schreibt man

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

<u>Bem:</u> Bei der Det: $a_{1\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)}$ Zuordnung 1. Index → 2. Index durch σ gegeben

<u>Bemerkung:</u> $\mathrm{id}_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$ ist das neutr Elt

Verknüpfung ist die Nacheinanderausführung $\sigma \circ \tau$

<u>Bsp</u> $S_1 = \{\mathrm{id}_{\{1\}}\}$, $S_2 = \left\{\mathrm{id}_X, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ sind abelsch

FRAGE

S_3 ist nicht abelsch: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

18.1.

<u>Prop 4.1.2</u> $\# S_n = n!$

<u>Beweis:</u> $X = \{1, \dots, n\}$. Ist $\sigma : X \to X$ eine Abb, so ist

σ bijektiv $\iff$ σ injektiv

(„$\Leftarrow$" σ injektiv $\Rightarrow$ $\# \sigma(X) = \{\sigma(i) : i \in X\} = n \Rightarrow \sigma(X) = X$ surj)

Um ein $\sigma \in S_n$ zu beschreiben, muss man also eine injektive Abb $\sigma : X \to X$ angeben.

Welche Möglichkeiten gibt es, die Elemente von X abzubilden

FRAGE

$\sigma(1) \in X$		n Möglichkeiten
$\sigma(2) \in X \setminus \{\sigma(1)\}$	wg Injektivität	$n-1$ Möglichk
$\sigma(3) \in X \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$		$n-2$ — " —
$\vdots$		$\vdots$
$\sigma(n) \in X \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(n-1)\}$		1 Mögl

Insgesamt $n!$ mögliche injektive Abb $\sigma : X \to X$ $\square$

Def 4.1.3 Eine Permutation $\tau \in S_n$ heißt Transposition, falls sie genau zwei Zahlen vertauscht, d.h. $\exists\, i,j \in X$, $i \neq j$ mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ und

$$\tau(k) = k \quad \forall\, k \in X,\ k \neq i,j$$

Folgerung: τ Transposition $\Rightarrow \tau^2 = id_X$

Satz 4.1.4 Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen

Beweis: Zu $\sigma \in S_n$ definiere $r(\sigma) \in \mathbb{N}$ wie folgt:

Falls $\sigma(n) \neq n$ setze $r(\sigma) = n+1$

Falls $\sigma(n) = n$, $\sigma(n-1) \neq n-1$ setze $r(\sigma) = n$

Falls $\sigma(n) = n, \ldots, \sigma(i) = i$, $\sigma(i-1) \neq i-1$ setze $r(\sigma) = i$

Falls $\sigma(n) = n, \ldots, \sigma(1) = 1$, setze $r(\sigma) = 1$

Beh: Jedes $\sigma \in S_n$ mit $r(\sigma) \leq r$ ist Produkt von Transp.

Ind-Anfang: $r = 1 \Rightarrow \sigma = id_X$ ist leeres Produkt

(oder $id_X = \tau^2$ für eine bel Transpos τ)

Ind-Hyp: Jedes $\sigma \in S_n$ mit $r(\sigma) \leq r-1$ ist Prod von Transposit.

Ind-Schritt: Sei $\sigma \in S_n$ mit $r(\sigma) = r$, d.h.

$\sigma(n) = n \ \ldots\ \sigma(r) = r$, $\sigma(r-1) \neq r-1$

$\Rightarrow \sigma(r-1) \notin \{r-1, r, \ldots, n\}$

Betrachte die Transposition τ, welche $r-1$ und $\sigma(r-1)$ vertauscht

FRAGE $\Rightarrow (\tau\circ\sigma)(n) = n, \ldots, (\tau\circ\sigma)(r) = r$, $(\tau\circ\sigma)(r-1) = r-1$

Also $r(\tau\circ\sigma) \leq r-1$

$\Rightarrow \tau\circ\sigma = \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_s$ Produkt von Transpos

$\Rightarrow \sigma = \tau\circ\tau_2\circ \ldots \circ\tau_s$ — " — $\square$

Bem: Die Anzahl der Transpos im Produkt ist nicht eindeutig bestimmt, da man immer $\tau\circ\tau$ hinzufügen kann, d.h. die Anzahl um 2 erhöhen kann

① Bauprinzip der Mathematik

Intuition

- plötzliche Erkenntnis eines Sachverhalts
- ohne dass bewusstes Nachdenken darauf hingeführt hat
- oft von dem befriedigenden Gefühl eines entscheidenden Erkenntnisgewinns begleitet

Übung: + eigene Intuition schult man am besten durch Knobeln an schwierigen Aufgaben

Def 4.1.5 Sei $\sigma \in S_n$. Falls sich σ als Produkt einer geraden Anzahl (bzw einer ungeraden Anzahl) von Transpositionen schreiben lässt, so heißt σ gerade (bzw ungerade)

Bem: Es ist nicht klar, dass σ nicht zugleich gerade und ungerade sein kann

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_4 = \tau_1' \circ \tau_2' \circ \tau_3'$$

Wir werden zeigen, dass dies unmöglich ist

Def 4.1.6 Sei $\sigma \in S_n$ Dann heißt

$$\operatorname{sgn} \sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$ das Signum von σ

Bsp: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ hat $\operatorname{sgn} \sigma = \frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{3-2}{3-1} \cdot \frac{3-1}{3-2} = -1$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat $\operatorname{sgn} \sigma = \frac{1-3}{2-1} \cdot \frac{2-3}{3-1} \cdot \frac{2-1}{3-2} = +1$

Satz 4.1.7

Beweis: a) Bildet man für $1 \leq i < j \leq n$ die Teilmenge $\{i, j\} \subseteq X = \{1, \dots, n\}$ so erhält man jede Zwei-elementige Teilmenge von X genau einmal, falls (i, j) die Menge $\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ durchläuft.

b) $\sigma \in S_n$ bildet zwei-elem Teilm $\{i,j\} \subseteq X$ auf zwei-elem Teilm $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ ab

Dabei wird jede zwei-elem Teilm genau einmal getroffen, denn $\{k, l\} = \{\sigma(\sigma^{-1}(k)), \sigma(\sigma^{-1}(l))\}$

und $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{\sigma(i'), \sigma(j')\}$

$\Rightarrow$ entweder $\sigma(i) = \sigma(i')$, $\sigma(j) = \sigma(j')$ $\Rightarrow$ $i = \sigma^{-1}(\sigma(i)) = \sigma^{-1}(\sigma(i')) = i'$, $j = j'$

oder umgekehrt $\Rightarrow$ $i = j'$, $j = i'$ $\Rightarrow \{i,j\} = \{i',j'\}$

c) Es folgt $\prod_{1 \le i < j \le n} (\sigma(j) - \sigma(i)) = \pm \prod_{1 \le i < j \le n} (j - i)$

also $\operatorname{sgn} \sigma = \pm 1$ und $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^s$ wobei s die Anzahl der negativen Faktoren auf der linken Seite ist

Satz 4.1.7 Sei $\sigma \in S_n$. Dann gilt $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^s$, wobei s die Anzahl der Fehlstände von σ ist, d.h. die Anzahl der Paare $(\sigma(i), \sigma(j))$ mit $1 \le i < j \le n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Insbesondere gilt $\operatorname{sgn} \sigma = \pm 1$. Für eine Transposition τ ist $\operatorname{sgn} \tau = -1$.

weiter im Beweis: d) sei $\tau \in S_n$ Transposition mit $\tau(i) = j > i$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

FRAGE

Fehlstände $(j, i+1), \dots, (j, j-1), (j, i)$

$(i+1, i), \dots, (j-1, i)$

Anzahl $= j-i-1 + 1 + j-i-1 = 2(j-i)-1$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} \tau = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$ $\square$

Satz 4.1.8 Die Abb $\operatorname{sgn}: S_n \to \{1, -1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, d.h. es gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (\operatorname{sgn} \tau) \quad \forall \sigma, \tau \in S_n$$

Beweis: $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j-i} =$

$$= \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}}_{=(*)} \cdot \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}}_{=\operatorname{sgn}\tau}$$

$$(*) = \prod_{\substack{i<j\\ \tau(i)<\tau(j)}} \frac{\sigma\tau(j)-\sigma\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \cdot \prod_{\substack{i<j\\ \tau(j)<\tau(i)}} \frac{\sigma\tau(j)-\sigma\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} = \frac{\sigma\tau(i)-\sigma\tau(j)}{i-j}$$

vertausche die Symb. „i" und „j"

$$= \prod_{\substack{\tau(i)<\tau(j)\\ i<j}} \frac{\sigma\tau(j)-\sigma\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)} \cdot \prod_{\substack{\tau(i)<\tau(j)\\ i>j}} \frac{\sigma\tau(j)-\sigma\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)}$$

$$= \prod_{\tau(i)<\tau(j)} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} = \prod_{\substack{k<l\\ \tau(i)=k,\ \tau(j)=l}} \frac{\sigma(l)-\sigma(k)}{l-k} = \operatorname{sgn}\sigma \qquad \square$$

<u>Korollar 4.1.9</u> Ist $\sigma\in S_n$ darstellbar als Produkt von s Transpositionen, so ist $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^s$. Insbesondere ist σ gerade, falls $\operatorname{sgn}\sigma = +1$ und ungerade, falls $\operatorname{sgn}\sigma = -1$

Beweis: $\sigma = \tau_1\circ\ldots\circ\tau_s \Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma = (\operatorname{sgn}\tau_1)\cdot\ldots\cdot(\operatorname{sgn}\tau_s) = (-1)^s$ $\square$

<u>Bem:</u> $\mathcal{A}_n := \{\sigma\in S_n : \operatorname{sgn}\sigma = +1\} \subseteq S_n$

$(\mathcal{A}_n,\circ)$ ist auch eine Gruppe, denn $\mathrm{id}_X \in \mathcal{A}_n$

$\sigma,\tau\in\mathcal{A}_n \Rightarrow \sigma\circ\tau\in\mathcal{A}_n$, $\sigma^{-1}\in\mathcal{A}_n$ $\left((\operatorname{sgn}\sigma^{-1})(\operatorname{sgn}\sigma) = (\operatorname{sgn}\mathrm{id}_X) =\right.$

$\mathcal{A}_n$ heißt die <u>alternierende Gruppe auf n Elemente</u>

$\mathcal{A}_n$ ist Untergruppe von S_n

<u>Def 4.1.10</u> Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $H\subseteq G$ eine Teilmenge. Ist H bez. $\cdot$ selbst eine Gruppe, so heißt H <u>Untergruppe von G</u>

4.2 Determinantenfunktionen

In diesem Abschnitt fest gewählt: V ein K-VR der Dim n

z.B. $V = K^n$

Wir wollen $\det A$ für $A \in K^{n \times n}$ definieren,

Wir fassen $A = (s_1, \ldots, s_n)$ als n-Tupel seiner Spalten

$s_1, \ldots, s_n \in K^n$ auf.

Also det ist Abb $\det : (K^n)^n \to K$

Allgemeiner betrachten wir Abb $\Delta : V^n \to K$

Solch eine Abb Δ heißt

- multilinear, falls sie linear in jedem Argument ist, Dabei heißt Δ linear im j-ten Argument, falls

  $\Delta(v_1, \ldots, v_{j-1}, \alpha v_j + \alpha' v_j', v_{j+1}, \ldots, v_n) =$

  $\alpha \Delta(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) + \alpha' \Delta(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j', v_{j+1}, \ldots, v_n)$ ist

  $\forall\, v_1, \ldots, v_n, v_j' \in V,\ \alpha, \alpha' \in K$

- alternierend, falls $\Delta(v_1, \ldots, v_n) = 0$ ist, sobald zwei der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gleich sind.

Def 4.2.1 Sei V ein K-VR der Dim n. Eine Determinantenfunktion auf V ist eine alternierende multilineare Abb $\Delta : V^n \to K$. Man bezeichnet Δ als nicht-triviel, falls Δ nicht die Nullabb ist

Prop 4.2.2 Sei V ein K-VR der Dim n und $\Delta : V^n \to K$ eine Determinantenfunktion, sowie $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann gilt $(v_1, \ldots, v_n)$ lin abh $\Longrightarrow \Delta(v_1, \ldots, v_n) = 0$

Beweis: $(v_1, \ldots, v_n)$ lin abh $\Rightarrow$ einer der Vektoren ist Linkomb der anderen, etwa $v_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$

$\Rightarrow \Delta(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \Delta(v_i, v_2, \ldots, v_n) = 0$ $\square$

Prop 4.2.3 Sei Δ eine Determinantenfunktion auf V und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann gilt:

a) $\Delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\Delta(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$, d.h. Δ ändert sein Vorzeichen bei Vertauschung zweier Argumente (Daher kommt die Bez. "alternierend")

b) für alle $\sigma \in S_n$ ist $\Delta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \Delta(v_1, \dots, v_n)$

c) $\Delta(\dots, v_i + \alpha v_j, \dots, v_j, \dots) = \Delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)$ für $\alpha \in K$, d.h. Δ ändert sich nicht, wenn man zu einem Argument das α-fache eines anderen Arguments addiert.

Beweis: a) $0 = \Delta(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) =$

(R2) $= \Delta(\dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots) + \Delta(\dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) =$

$= \cancel{\Delta(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots)} + \Delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) +$

$+ \Delta(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) + \cancel{\Delta(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots)} \Rightarrow$ Beh

b) Ist σ Transposition mit $\sigma(i) = j$, so folgt Beh aus a)

Allgemein ist $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s$ Produkt von s Transpos

$\Rightarrow \Delta(\dots, v_{\sigma(i)}, \dots) = \Delta(\dots v_{\tau_1 \dots \tau_s(i)} \dots) = -\Delta(\dots v_{\tau_2 \dots \tau_s(i)} \dots)$

$= \dots = (-1)^s \Delta(v_1, \dots, v_n) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \Delta(v_1, \dots, v_n)$

c) $\Delta(\dots, v_i + \alpha v_j, \dots, v_j, \dots) = \Delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \alpha \underbrace{\Delta(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots)}_{=0}$ $\square$

Frage: Gibt es Bsp für Determinantenfkt?

Satz 4.2.4 Für Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1 \dots n} \in K^{n \times n}$ definiert man die Determinante von A durch

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \in K$$

Dann ist $\det$ aufgefasst als Fkt in den Spalten von A eine Determinantenfunktion auf $V = K^n$ ($\det: (K^n)^n \to K$)

Sie erfüllt $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$ und ist insbesondere nicht trivial.

FOTO von Leibniz

Beweis: • det ist multilinear in den Spalten von A, (4.6)

da jeder Summand $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ linear in $a_{\sigma(i),i}$ ist

• det ist alternierend

Seien $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von A

Z.z. Gilt $s_i = s_j$ für $i \neq j$, so ist $\det(s_1, \dots, s_n) = 0$

Betrachte dazu die Transposition τ, die i und j vertauscht.

det ist Summe über alle $\sigma \in S_n$

Zerlege $S_n = A_n \cup A_n\tau$, $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$

wobei $A_n\tau := \{\sigma\tau : \sigma \in A_n\} \overset{!}{=} \{\tilde\sigma \in S_n : \operatorname{sgn}\tilde\sigma = -1\}$

Beweis: „$\subseteq$" $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \underbrace{(\operatorname{sgn}\sigma)}_{=+1}\underbrace{(\operatorname{sgn}\tau)}_{=-1} = -1$

„$\supseteq$" Ist $\tilde\sigma \in S_n$ mit $\operatorname{sgn}\tilde\sigma = -1 \Rightarrow \tilde\sigma = (\overbrace{\tilde\sigma\tau}^{=\sigma})\tau$

und $\operatorname{sgn}(\tilde\sigma\tau) = (-1)\cdot(-1) = +1$, d.h. $\underbrace{\tilde\sigma\tau}_{\sigma} \in A_n$, $\underbrace{\tilde\sigma}_{\sigma\tau} \in A_n\tau$

Nun berechne $\det(s_1, \dots, s_n) =$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$+ \sum_{\sigma \in A_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma\tau)}_{= -\operatorname{sgn}\sigma}\, a_{\sigma\tau(1),1} \cdots a_{\sigma\tau(i),i} \cdots a_{\sigma\tau(j),j} \cdots a_{\sigma\tau(n),n}$$

Wegen $a_{\sigma\tau(i),i} = a_{\sigma(j),i} = a_{\sigma(j),j}$ und

$a_{\sigma\tau(j),j} = a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),i}$ und

$a_{\sigma\tau(k),k} = a_{\sigma(k),k} \quad \forall\, k \neq i, j$

folgt $\det(s_1, \dots, s_n) = 0$

• $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$, da in det nur der Summand für $\sigma = \mathrm{id}$ ungleich Null ist. Dieser ist 1 $\square$

(Aufgabe)

1.

Lemma 4.2.5 Sei Δ eine Determinantenfkt auf V und $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V. Dann gilt für bel Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$:

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \det({}_{\mathcal{B}}[v_1], \dots, {}_{\mathcal{B}}[v_n]) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n)$$

D.h. Δ ist durch den Wert $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ eindeutig bestimmt

Beweis: Seien ${}_{\mathcal{B}}[v_j] = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in K^n$

Also $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \quad , \; ({}_{\mathcal{B}}[v_1], \dots, {}_{\mathcal{B}}[v_n]) = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$

FRAGE

$$\Rightarrow \Delta(v_1, \dots, v_n) = \Delta\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} x_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} x_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n,n} \underbrace{\Delta(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})}$$

falls zwei der $i_1, \dots, i_n$ gleich, so ist $= 0$

also braucht nur über die $i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$ für $\sigma \in S_n$ summiert werden

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \, \Delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \, a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \, \Delta(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \det(a_{ij})_{i,j} \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n) \qquad \square$$

Satz 4.2.6 Sei $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis des K-VR V und Δ eine Determinantenfkt. Dann sind äquiv

1. Δ ist die Nullabb
2. $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$

Beweis: $1 \Rightarrow 2$ ✓ $\quad 2 \Rightarrow 1$ $\quad \Delta(v_1, \dots, v_n) = \det({}_{\mathcal{B}}[v_1], \dots, {}_{\mathcal{B}}[v_n]) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n)$

Satz 4.2.7 Sei Δ eine nicht-triv Determinantenfkt auf dem n-dim K-VR V und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann sind äquiv

1. $(v_1, \dots, v_n)$ sind linear abh
2. $\Delta(v_1, \dots, v_n) = 0$

Beweis: $1 \Rightarrow 2$ laut Prop 4.2.2

$2 \Rightarrow 1$ Sei $\Delta(v_1,\dots,v_n) = 0$

Annahme $(v_1,\dots,v_n)$ lin unabh, also Basis von V

FRAGE $\overset{4.2.6}{\Longrightarrow}$ Δ ist die Nullabb ↯ zu Δ nicht-trivial

Also muss $(v_1,\dots,v_n)$ lin abh sein □

Satz 4.2.8 Sei $\mathcal{B} = (x_1,\dots,x_n)$ Basis des K-VR V. So ist

$\det_{\mathcal{B}} : V^n \to K$, $\det_{\mathcal{B}}(v_1,\dots,v_n) := \det({}_{\mathcal{B}}[v_1],\dots,{}_{\mathcal{B}}[v_n])$

eine Determinantenfunktion auf V mit $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n) =$

Für jede andere Determinantenfkt Δ auf V gibt es ein ein best $\alpha \in K$ mit $\Delta(v_1,\dots,v_n) = \alpha \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1,\dots,v_n)$ $\forall v_1,\dots,v_n \in V$

Beweis: • Betrachte den Isom ${}_{\mathcal{B}}[\,.\,] : V \to K^n$

Insbes gilt: ${}_{\mathcal{B}}[\,.\,]$ linear und $v_i = v_j \Longrightarrow {}_{\mathcal{B}}[v_i] = {}_{\mathcal{B}}[v_j]$

Deshalb ist $\det_{\mathcal{B}}$ ein Det fkt auf V

FRAGE • $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$

• Sei $v_1,\dots,v_n \in V$. Es gilt nach Lemma 4.2.5

$\Delta(v_1,\dots,v_n) = \det_{\mathcal{B}}(v_1,\dots,v_n) \cdot \underbrace{\Delta(x_1,\dots,x_n)}_{=: \alpha \in K}$ □

Korollar 4.2.9 Seien Δ, Δ' Detfkt auf dem K-VR V und sei Δ nicht-trivial. Dann ist

$\Delta' = \beta \cdot \Delta$ für ein eind best $\beta \in K$

Beweis: Wähle Basis $\mathcal{B}$ von V $\Longrightarrow$ $\Delta = \alpha \cdot \det_{\mathcal{B}}$

$\Delta' = \alpha' \cdot \det_{\mathcal{B}}$ für $\alpha, \alpha' \in K$ eind best

Wäre $\alpha = 0$, so wäre Δ die Nullabb ↯ zu nicht-triv

$\Longrightarrow \Delta' = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \Delta$ □

4.3 Determinanten von Endomorphismen und Matrizen

Prop 4.3.1 Sei Δ eine nicht-triv Detfkt auf einem n-dim K-VR V (Δ existiert nach 4.2.8). Ferner sei $f: V \to V$ ein Endom. Dann gilt

1. Durch $\Delta_f(v_1,\dots,v_n) := \Delta(f(v_1),\dots,f(v_n))$ für $v_1,\dots,v_n \in V$ wird auf V eine Detfkt definiert.
2. Es existiert ein eind best $\alpha_f \in K$ mit $\Delta_f = \alpha_f \cdot \Delta$
3. Ist $\mathbb{B} = (x_1,\dots,x_n)$ Basis von V, so ist
$$\alpha_f = \det({}_{\mathbb{B}}[f(x_1)],\dots,{}_{\mathbb{B}}[f(x_n)]) = \det({}_{\mathbb{B}}[f]_{\mathbb{B}})$$
4. Ist Δ' eine bel andere Detfkt auf V und $v_1,\dots,v_n \in V$, so ist
$$\Delta'(f(v_1),\dots,f(v_n)) = \alpha_f \cdot \Delta'(v_1,\dots,v_n)$$ für das eind best α_f aus 2.

FRAGE

Beweis: 1. Δ_f ist multilinear, da Δ multilinear und f linear. Δ_f ist alternierend, da $v_i = v_j \Rightarrow f(v_i) = f(v_j)$
$$\Rightarrow \Delta_f(v_1,\dots,v_n) = 0$$

2. Nach 4.2.9 $\exists\, \alpha_f \in K$ mit $\Delta_f = \alpha_f \cdot \Delta$

3. $$\alpha_f \cdot \Delta(x_1,\dots,x_n) \overset{2.}{=} \Delta_f(x_1,\dots,x_n) \overset{\text{Def}}{=} \Delta(f(x_1),\dots,f(x_n))$$
$$\overset{4.2.5}{=} \det({}_{\mathbb{B}}[f(x_1)],\dots,{}_{\mathbb{B}}[f(x_n)]) \cdot \Delta(x_1,\dots,x_n)$$
Da $\Delta(x_1,\dots,x_n) \neq 0$ nach 4.2.6 folgt die Beh $\square$

Def 4.3.2 Sei $f: V \to V$ ein Endom eines endl-dim K-VR V und $\alpha_f \in K$ wie in 4.3.1. Dann heißt
$$\det f := \alpha_f$$ die <u>Determinante von f</u>

Folgerung: Ist $\mathbb{B}$ Basis von V, so ist $\det f = \det({}_{\mathbb{B}}[f]_{\mathbb{B}})$

4. $\Delta' = \beta \cdot \Delta$ nach 4.2.9 für $\beta \in K$ eind best
$$\Rightarrow \Delta'(f(v_1),\dots,f(v_n)) = \beta \cdot \Delta(f(v_1),\dots,f(v_n)) =$$
$$\beta \cdot \alpha_f \cdot \Delta(v_1,\dots,v_n) = \alpha_f \cdot \Delta'(v_1,\dots,v_n)$$

Satz 4.3.3 Ist V ein n-dim K-VR, $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$, $\alpha \in K$

1. $\det(\mathrm{id}_V) = 1$
2. $\det(\alpha \cdot f) = \alpha^n \det f$
3. $\det(f \circ g) = (\det f) \cdot (\det g)$
4. $\det f \neq 0 \iff f$ ist Automorphismus, d.h. bijektiv
5. Ist f Autom von V, so ist $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$
6. $\det(f^*) = \det f$ für die duale Abb $f^*: V^* \to V^*$

Satz 4.3.4 Seien $A, B \in K^{n \times n}$, $\alpha \in K$. Dann gilt

1. $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$
2. $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \det A$
3. $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$
4. $\det A \neq 0 \iff A$ invertierbar, d.h. $A \in GL_n(K)$
5. $A \in GL_n(K) \implies \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
6. $\det(A^T) = \det A$ für die transponierte Matrix A^T

Beweis von 4.3.3 und 4.3.4 parallel: $\mathrm{End}_K(V) \xrightarrow{\sim} K^{n \times n}$, $f \longmapsto {}_B[f]_B$

1. $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$ nach 4.2.4
2. $A = (s_1, \dots, s_n)$ mit $s_i \in K^n$ Spalten von A

FRAGE $\implies \det(\alpha A) = \det(\alpha s_1, \dots, \alpha s_n) = \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n\text{-mal}} \det(s_1, \dots, s_n)$
$= \alpha^n \det A$

3. Benutze Endomorphismen f, g von V
Wähle Basis $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ von V, sowie nicht-triv Det fkt Δ auf V. Dann gilt

$$\det(f \circ g) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{Def } 4.3.1}{=} \Delta(f \circ g(x_1), \dots, f \circ g(x_n))$$
$$= \det f \cdot \Delta(g(x_1), \dots, g(x_n)) = (\det f)(\det g)\, \Delta(x_1, \dots, x_n)$$

Da $\Delta(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ nach 4.2.6 folgt die Beh

4. $A \in GL_n(K) \iff$ Spalten von A sind lin unabh
$\iff \det A \neq 0$ nach 4.2.7

5. Sei $A \in GL_n(K) \Rightarrow (\det A) \cdot \det(A^{-1}) \overset{3.}{=} \det(A \cdot A^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_n) \overset{1.}{=} 1$

$\Rightarrow$ Beh

6. Für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1-n \\ j=1-n}} \in K^{n \times n}$ ist $A^T = (b_{ij})_{\substack{i=1-n \\ j=1-n}}$, $b_{ij} = a_{ji}$

($b_{12} = a_{21}$, etc.)

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

$$\overset{\tau := \sigma^{-1}}{=} \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sgn} \tau^{-1})\, a_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\tau(n)} = \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sgn} \tau)\, b_{\tau(1),1} \cdot \ldots \cdot b_{\tau(n),n} = \det A^T$$

□

<u>Korollar 4.3.5</u> Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix vom Rang r. Dann lässt sich aus A durch Streichen von Spalten und Zeilen eine quadratische Untermatrix $A' \in K^{r \times r}$ mit $\det A' \neq 0$ konstruieren. Jede quadratische Untermatrix von A mit mehr als r Zeilen und Spalten hat Determinante 0.

Bew: 1.) $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}_Z A \Rightarrow \exists\ r$ linear unabh Zeilen.
Streiche die restlichen Zeilen und erhalte $\tilde{A} \in K^{r \times n}$
Zeilen von $\tilde{A}$ lin unabh $\Rightarrow r = \operatorname{rg} \tilde{A} = \operatorname{rg}_S \tilde{A}$
$\Rightarrow \exists\ r$ lin unabh Spalten in $\tilde{A}$
Streiche die restlichen Spalten und erhalte $A' \in K^{r \times r}$
Spalten von A' lin unabh $\Rightarrow \det A' \neq 0$ (4.2.7)

2.) Ist $A'' \in K^{s \times s}$ Untermatrix von A mit $s > r$
Da je s Spalten von A lin abh folgt, dass auch die Spalten von A'' lin abh sind $\Rightarrow \det A'' = 0$ □

Satz 4.3.6 Sei $A \in K^{n\times n}$, $\alpha \in K$

Typ II: $\det A$ ändert sich nicht, wenn man zu der i-ten Zeile (bzw Spalte) das α-fache der j-ten Zeile von A (bzw Spalte) addiert.

Typ III: $\det A$ ändert das Vorzeichen, wenn man in A die i-te und die j-te Zeile (bzw Spalte) vertauscht

Typ I: $\det A$ multipliziert sich mit α, wenn man die i-te Zeile (bzw Spalte) von A mit α multipliziert

Beweis: Wg $\det A = \det A^T$ genügt es I–III für Spaltenumformungen zu zeigen.
Da det eine Determinantenfkt ist haben wir I–III schon gezeigt (4.2.3) $\square$

Beispiele 4.3.7

1. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix

d.h. $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$.

Dann ist $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Beweis: $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$

Betrachte die einzelnen Summanden.

Sei $\sigma \in S_n$. Gibt es ein j mit $\sigma(j) > j$, so ist $a_{\sigma(j),j} = 0$

RAGE Gilt $\sigma(j) \le j \quad \forall j = 1, \dots, n$, so folgt $\sigma = \mathrm{id}_X$

$\Rightarrow \det A = (\operatorname{sgn} \mathrm{id}_X)\, a_{11} \cdots a_{nn}$ $\square$

2. Verfahren zur Berechnung von $\det A$

Sei $A \in K^{n\times n}$. Bringe A durch elem Zeilenumf auf Zeilenstufenform.

Protokolliere dabei, wie sich $\det A$ ändert (4.3.6)

Ist $\operatorname{rg} A < n \Rightarrow \det A = 0$

Ist $\operatorname{rg} A = n$, so ist A nun eine obere Dreiecksmatrix und $\det A$ berechnet sich mittels 1.

3. Zu $m, n \in \mathbb{N}$ betrachte man Matrizen $A_{11} \in K^{m \times m}$, $A_{12} \in K^{m \times n}$, $A_{22} \in K^{n \times n}$ und die Nullmatrix $O \in K^{n \times m}$.
Für die Block-Matrix $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right)$ gilt dann

$$\det A = (\det A_{11})(\det A_{22})$$

<u>Beweis:</u> Betrachte die Abb für fest gewählte A_{12} und A_{22}

$$\Delta : K^{m \times m} \to K, \quad B \mapsto \det \left(\begin{array}{c|c} B & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right)$$

RAGE Dann ist Δ eine Determinantenfkt in den Spalten von
Wegen 4.2.5 gilt $\Delta(B) = \det B \cdot \Delta(\mathrm{Id}_m)$, also

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) = (\det A_{11}) \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_m & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right)$$

Betrachte nun die Abb für fest gewähltes A_{12}

$$\tilde{\Delta} : K^{n \times n} \to K, \quad C \mapsto \det \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_m & A_{12} \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

Dann ist $\tilde{\Delta}$ eine Detfkt in den Zeilen von C
Wegen 4.2.5 gilt $\tilde{\Delta}(C) = \det C \cdot \tilde{\Delta}(\mathrm{Id}_n)$, also

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_m & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) = (\det A_{22}) \cdot \underbrace{\det \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_m & A_{12} \\ \hline O & \mathrm{Id}_n \end{array}\right)}_{=1 \text{, da obere Dreiecksmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Beh $\square$

Andere Beweise in [Bosch: LA, Seiten 148 f]
mit
- Formel von Leibniz
- elem Zeilenumformungen im Sinne von 4.3.7/2.

4.4. Die Cramer'sche Regel

<u>Motivation:</u> Invertierung von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$

Etwa $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{S_{12}(-\frac{b}{a})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & \underbrace{d - \frac{b}{a}c}_{= \frac{\det A}{a}} \\ \hline 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2(\frac{a}{\det A})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \\ \hline 1 & -\frac{b}{\det A} \\ 0 & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix} \overset{S_{21}(-c)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \frac{ad}{\det A} & -\frac{b}{\det A} \\ -\frac{ac}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1(\frac{1}{a})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \frac{d}{\det A} & -\frac{b}{\det A} \\ -\frac{c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix}$$

die zu A gehörende Komplementärmatrix

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$$

Ziel: Verallgemeinerung auf $A \in GL_n(K)$ $n > 2$

Dazu $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T$ und $d = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $-b = \det\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $-c = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $a = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Allgemein:</u> Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ und seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$

Wir definieren

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

d.h. in A wird a_{ij} durch 1 ersetzt und der Rest der i-ten Zeile und der j-ten Spalte wird durch 0 ersetzt.

Ferner definieren wir $A'_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A (oder äquivalent von A_{ij})

Prop 4.4.1 Sei $A \in K^{n\times n}$ mit den Spalten $A=(s_1,\dots,s_n)$, $s_j \in K^n$. Dann gilt für $i,j \in \{1,\dots,n\}$:

a) $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij})$

b) $\det(A_{ij}) = \det(s_1,\dots,s_{j-1},e_i,s_{j+1},\dots,s_n)$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist $e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i$

Beweis: a) Falls $i=j=1$, so ist $A_{11} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A'_{11}\end{array}\right)$

$\Rightarrow \det(A_{11}) = \det(A'_{11}) = (-1)^{1+1}\det(A'_{11})$ ✓

Falls i,j beliebig, so berechne $\det(A_{ij})$ wie folgt:

FRAGE

Vertausche Zeilen $i-1$ und i, dann Zeilen $i-2$ und $i-1$, $\dots$, dann Zeilen 1 und 2

Vertausche Spalten $j-1$ und j, dann $j-2$ und $j-1$, $\dots$, dann 1 und 2

Dadurch erhält man neue Matrix $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A'_{ij}\end{array}\right)$

$\Rightarrow \det(A_{ij}) = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \cdot \det(A'_{ij})$

b) $$(s_1,\dots,s_{j-1},e_i,s_{j+1},\dots,s_n) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} & * & 0 & * & \\ & & \vdots & & \\ * & \cdots\; * & 1 & * \;\cdots & * \\ & & \vdots & & \\ & * & 0 & * & \end{array}\right) & \leftarrow i \\ \quad\quad\quad\quad \uparrow j & \end{array}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der j-ten Spalte zu den anderen Spalten erhält man A_{ij} $\Rightarrow$ Beh. □

Def 4.4.2 Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$ seien die Matrizen A_{ij} und A'_{ij} wie oben definiert. Dann heißt

$$\tilde{a}_{ij} := \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$$

der Cofaktor von A zum Indexpaar (i,j). Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ heißt die Matrix der Cofaktoren von A und $A^{ad} := \tilde{A}^T = (\tilde{a}_{ji})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ heißt die zu A adjungierte

Matrix (oder die zu A gehörende Komplementärmatrix) (4.11)

Bsp $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{ad} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1.2.

Satz 4.4.3 Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Dann gilt

$$A \cdot A^{ad} = A^{ad} \cdot A = (\det A) \cdot \mathrm{Id}_n$$

oder ausführlich: für $i,j \in \{1,\dots,n\}$

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij} \cdot \det A$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \tilde{a}_{jk} = \delta_{ij} \cdot \det A$$

Beweis: Seien $A = (s_1,\dots,s_n)$ die Spalten von A d.h. $s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ki}\, a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \det A_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \det(s_1,\dots,s_{i-1}, e_k, s_{i+1},\dots,s_n) =$$

FRAGE

$$= \det(s_1,\dots,s_{i-1}, s_j, s_{i+1},\dots,s_n) \quad \text{denn } s_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$$

$$= \delta_{ij} \det A$$

D.h. $\tilde{A}^T \cdot A = (\det A) \cdot \mathrm{Id}_n$

Z $A \cdot \tilde{A}^T = (\det A) \cdot \mathrm{Id}_n$

Betrachte $B := A^T \Rightarrow \det B = \det A$, $\tilde{B} = (\tilde{A})^T$

(denn $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = a_{ji} \Rightarrow B_{ij} = A_{ji}^T \Rightarrow \tilde{b}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$)

Also gerade gezeigt $(\tilde{B})^T \cdot B = (\det B) \cdot \mathrm{Id}_n$

Transponieren liefert $A \cdot (\tilde{A})^T = B^T \cdot \tilde{B} = (\tilde{B}^T \cdot B)^T = \det A \cdot \mathrm{Id}_n$ □

4.4

Korollar 4.4.5 Für $A \in GL_n(K)$ gilt

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^{ad}$$

Beweis: $((\det A)^{-1} \cdot A^{ad}) \cdot A = \mathrm{Id}_n$ □

Bemerkung: Für praktische Berechnung von A^{-1} ist dies nicht geeignet (außer bei $n=2$)

Es folgt jedoch daraus, dass die Abb

$$GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^{-1} \text{ stetig ist}$$

(und sogar diffbar vgl Analysis II)

denn $A \mapsto \det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}$

ist stetig (in den Einträgen a_{ij} von A)

und $A \mapsto A'_{ij} \mapsto (-1)^{i+j} \det A'_{ij} = \tilde{a}_{ij} \mapsto \frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A}$

ist stetig für $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Laplace'scher Entwicklungssatz

Korollar 4.4.4 Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Dann gilt

1. Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A'_{ik}$$

2. Entwicklung nach der j-ten Spalte

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \det A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A'_{kj}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2-(-2)) + 3 \cdot (-4-(-2)) = -2$$

Korollar 4.4.6 (Cramersche Regel) Für $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$ betrachte man das LGS $Ax = b$. Dann ist $x = A^{-1}b$ die eindeutige Lösung dieses LGS. Sind $A = (s_1, -, s_n)$ die Spalten von A und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ so erhält man

$$x_j = \frac{\det(s_1, -, s_{j-1}, b, s_{j+1}, -, s_n)}{\det A}$$

Beweis: $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}^T$

Ist $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, so folgt

$$x_j = j\text{-te Zeile von } A^{-1}b = (\det A)^{-1} (\tilde{a}_{1j}, -, \tilde{a}_{nj}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= (\det A)^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} b_i = (\det A)^{-1} \sum_{i=1}^n b_i \det A_{ij}$$

$$= (\det A)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \det(s_1, -, s_{j-1}, e_i, s_{j+1}, -, s_n)$$

$$= (\det A)^{-1} \cdot \det(s_1, -, s_{j-1}, b, s_{j+1}, -, s_n) \qquad \square$$

Bem für $n = 2$ haben wir diese Formel schon hergeleitet am Beginn von Kapitel 4