Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 9
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 13.12.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) := 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Bestimmen Sie Elemente $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ mit $f^{-1}(\{1\}) = x + \langle\{y, z\}\rangle$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *affin*, wenn es eine K-lineare Abbildung $\tilde{f} : V \to W$ gibt mit $\tilde{f}(v - v') = f(v) - f(v')$ für alle Elemente $v, v' \in V$. Zeigen Sie: Ist f eine affine Abbildung und A ein affiner Unterraum von V, so ist das Bild $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ von A unter f ein affiner Unterraum von W.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Betrachten Sie die Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{C}^3$ gegeben durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die zugehörige duale Basis von $(\mathbb{C}^3)^*$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und V^* der Dualraum von V. Für einen Untervektorraum U von V sei $U^\perp := \{\varphi \in V^* \mid U \subseteq \ker(\varphi)\}$. Zeigen Sie:

(i) $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V^*. Es gilt $\{0\}^\perp = V^*$ und $V^\perp = \{0\}$.

(ii) Ist W ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, so gilt $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^\perp$ und $\mathrm{im}(f^*) = \ker(f)^\perp$.