Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 8
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 06.12.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es seien V_1 und V_2 zwei endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie:

(i) Die durch $\iota_1(v) := (v, 0)$ bzw. $\iota_2(w) := (0, w)$ definierten Abbildungen $\iota_1 : V_1 \to V_1 \times V_2$ bzw. $\iota_2 : V_2 \to V_1 \times V_2$ sind K-linear und injektiv. Es gilt $V_1 \times V_2 = \mathrm{im}(\iota_1) \oplus \mathrm{im}(\iota_2)$.

(ii) Die durch $\mathrm{pr}_1((v, w)) := v$ definierte Abbildung $\mathrm{pr}_1 : V_1 \times V_2 \to V_1$ ist K-linear und surjektiv mit $\ker(\mathrm{pr}_1) = \mathrm{im}(\iota_2)$.

Folgern Sie aus jeder der beiden Aussagen (i) und (ii), dass $\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Gegeben wird im Folgenden eine Menge M und eine Relation $\sim$ auf M. In welchen Fällen ist die Relation $\sim$ reflexiv, in welchen symmetrisch und in welchen transitiv? Wenn es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, dann geben Sie die Äquivalenzklasse $[a]$ eines Elements $a \in M$ an und bestimmen Sie ein *Repräsentantensystem* von $M/\sim$ in M, d.h. eine Teilmenge $S \subset M$, so dass S aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ genau einen Repräsentanten enthält.

(i) $M = \mathbb{R}$; $a \sim b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

(ii) $M = \mathbb{R}$; $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

(iii) $M = \mathbb{Z}$; $a \sim b \Leftrightarrow a$ teilt b (d.h. es gibt ein Element $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = a \cdot c$)

Aufgabe 3 (4 Punkte): Betrachten Sie auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation $\sim$, definiert durch $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = cb$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und setzen Sie $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, &\quad [(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + cb, bd)], \quad \text{und} \\ \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, &\quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)], \end{aligned}$$

wohldefiniert sind und $\mathbb{Q}$ zu einem Körper machen. Er heißt der *Körper der rationalen Zahlen*, und man schreibt auch $\frac{a}{b}$ für die Äquivalenzklasse $[(a, b)]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): (Zweiter Isomorphiesatz) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie, dass für zwei Untervektorräume U und W von V die Abbildung

$$(u + (U \cap W) \mapsto u + W) : U/(U \cap W) \longrightarrow (U + W)/W$$

wohldefiniert und ein K-linearer Isomorphismus ist.