Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 7
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 29.11.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Das aktuelle Übungsblatt dient der Veranschaulichung der Multiple-Choice-Form, die die Klausur haben wird. Bitte versehen Sie jede Ihrer Antworten mit einer ausführlichen schriftlichen Begründung. In der Klausur wird eine solche Begründung nicht von Ihnen verlangt werden. Bitte beachten Sie außerdem, dass die unten stehenden Aufgaben wie üblich korrigiert und nicht nach dem für die Klausur vorgesehenen Schema bewertet werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Die Basis (v_1, v_2) des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfüllen die Bedingungen $f(v_1) = f(v_2) = g(v_1 + v_2) = g(v_1 - v_2) = 2$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(A) Es gilt $f(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}) = 5$.

(B) Es gilt $\ker(g) = \langle v_2 \rangle$.

(C) (f, g) ist eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(D) Die Abbildungen f und g sind Epimorphismen.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig?

(A) Sind V_1, V_2, W_1 und W_2 Vektorräume über einem Körper K, und sind die Abbildungen $f_1 : V_1 \to W_1$ und $f_2 : V_2 \to W_2$ K-linear, so wird durch die Vorschrift $((v_1, v_2) \mapsto (f_1(v_1), f_2(v_2))$ eine K-lineare Abbildung $V_1 \times V_2 \to W_1 \times W_2$ definiert.

(B) Ist V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und ist $f : V \to V$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für $v, w \in V$ stets $f(v + w) = f(v) + f(w)$ gilt, so ist f eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung.

(C) Sind V und W Vektorräume über einem Körper K, und ist $v \in V$ fest gewählt, so wird durch die Vorschrift $(f \mapsto f(v))$ eine K-lineare Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V, W) \to W$ definiert.

(D) Ist K ein Körper, und sind $f, g \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K)$, so wird durch die Vorschrift $(x \mapsto f(x)g(x))$ eine K-lineare Abbildung $K^2 \to K$ definiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und f und g zwei Endomorphismen von V. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig?

(A) Es gilt $\ker(g) \subseteq \ker(f \circ g)$.

(B) Ist f injektiv, so gilt $\ker(g) = \ker(f \circ g)$.

(C) Gilt $\ker(g) = \ker(f \circ g)$, so ist f injektiv.

(D) Ist $f \circ g$ ein Automorphismus von V, so sind auch f und g Automorphismen von V.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper K mit $\dim(V) = 6$ und $\dim(W) = 4$. Ferner seien $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(W, V)$ mit $\dim(\ker(f)) = 2$ und $\dim(\mathrm{im}(g)) = 3$. Welche der folgenden Vektorräume sind isomorph zu K^4?

(A) $\mathrm{im}(f)$

(B) $\mathrm{Hom}_K(\ker(g), W)$

(C) $f^{-1}(\ker(g))$

(D) $\ker(g \circ f)$