Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 6
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 22.11.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Betrachten Sie die folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^3$:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $E := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(ii) Bestimmen Sie alle maximalen linear unabhängigen Teilmengen von E; nach (i) sind das alle Basen von $\mathbb{Q}^3$, die in E enthalten sind.

(iii) Stellen Sie für jede maximale linear unabhängige Teilmenge B von E die Elemente von $E \setminus B$ als Linearkombination der Elemente von B dar.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Untervektorräume U und V gegeben durch

$$U := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{und} \quad V := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $U + V$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen und $q := \#K$ seine Mächtigkeit. Zeigen Sie:

(i) Ist V ein endlich erzeugter K-Vektorraum der Dimension n, so besitzt V genau q^n Elemente.

(ii) Der K-Vektorraum K^2 besitzt genau $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ Basen.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie per Induktion nach n: Für jede Familie von Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_n$ von V gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \dim(U_i) = \dim(\sum_{i=1}^{n} U_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \dim((\sum_{j=1}^{i} U_j) \cap U_{i+1}).$$

Folgern Sie, dass V genau dann die direkte Summe der Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ ist, wenn $V = U_1 + \ldots + U_n$ gilt und $(U_1 + \ldots + U_i) \cap U_{i+1} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.